

Zur (Polynom-)Interpolation und diskreten Čebyšev-Approximation

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der

Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Kunibert Martin
aus Duisburg

Bochum 1976



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546603_0048

Zur (Polynom-)Interpolation und diskreten Čebyšev-Approximation

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der

Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Kunibert Martin

aus Duisburg

Bochum 1976



Dissertation eingereicht am 9.12.1975

Tag der mündlichen Prüfung: 10. 2.1976

Dekan: Prof. Dr. H. Amann

Referent: Prof. Dr. H. Ehlich

Korreferent: Prof. Dr. D. Braess

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
<u>Kapitel I</u> Zur zweidimensionalen Interpolation	
§ 1 Das allgemeine Interpolationsproblem und die Theorie der Interpolationssysteme	8
§ 2 Existenz und Eindeutigkeit des zweidimensionalen Interpolationsproblems	15
§ 3 Darstellung des zweidimensionalen Interpolationspolynoms	23
<u>Kapitel II</u> Zur zweidimensionalen diskreten Čebyšev-Approximation	
§ 4 Das allgemeine diskrete Čebyšev-Approximationsproblem und die Theorie der diskreten Čebyšev-Approximationssysteme	33
§ 5 Diskrete Čebyšev-Approximation in zwei Veränderlichen	66
§ 6 Beispiel: Der Satz von EHLICH und ZELLER	98
Schlußbemerkungen	103
Literaturverzeichnis	118

Einleitung

Bezeichnet man mit $C[a,b]$ wie üblich den Raum aller auf dem reellen Intervall $[a,b]$ stetigen reellwertigen Abbildungen und ist U ein $(n+1)$ -dimensionaler Teilraum von $C[a,b]$ ($n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$), so besteht die Interpolationsaufgabe darin, zu jedem $f \in C[a,b]$ bei irgendwelchen vorgegebenen Punkten $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ ($x_i \neq x_j, i \neq j$) ein $u \in U$ so zu bestimmen, daß gilt

$$f(x_j) = u(x_j), \quad 0 \leq j \leq n.$$

Bei der Behandlung dieser Aufgabe spielen Haar-Systeme vom Grad n auf $[a,b]$ eine entscheidende Rolle, garantieren sie doch, daß die Interpolationsaufgabe stets eindeutig lösbar ist. Dabei nennt man die $n+1$ linear unabhängigen Funktionen $u_0, u_1, \dots, u_n \in U$ ein Haar-System vom Grad n auf $[a,b]$, wenn jede Linearkombination $\sum_{j=0}^n a_j \cdot u_j$ ($a_j \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq n$), die auf $[a,b]$ nicht identisch verschwindet, höchstens n verschiedene Nullstellen in $[a,b]$ besitzt. Es lag nahe zu fragen, ob sich Haar-Systeme auch auf mehrdimensionalen Gebieten definieren lassen. Eine erste Aussage hierzu stammt schon von A. HAAR [6]:

Ist W eine Punktmenge des $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), die mindestens einen inneren Punkt enthält, so gibt es auf W kein Haar-System vom Grad $m \geq 1$.

Die vollständige Klärung brachte schließlich der Satz von J. C. MAIRHUBER [12], der von P. C. CURTIS Jr. [2] verallgemeinert wurde:

Eine kompakte Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), die mindestens $m + 1 \geq 2$ Punkte enthält, kann genau dann als Definitionsbereich für ein Haar-System vom Grad m dienen, wenn Q homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge der Einheitskreislinie $\{z : |z| = 1, z \in \mathbb{C}\}$ ist.

Dies zeigt, daß sich die im Eindimensionalen gebräuchlichen Methoden nicht ohne weiteres heranziehen lassen zur Lösung von Interpolationsaufgaben in mehreren Veränderlichen, wie sie wohl zuerst von H. E. SALZER [16], [17], [18] und [19] behandelt wurden. (Eine Zusammenfassung der bis 1958 bekannten Ergebnisse auf dem Gebiet der zweidimensionalen Lagrange-Interpolation bringt die Monographie von M. E. MILNE, W. ARNTZEN, N. REYNOLDS und J. WHEELOCK [14], in der auch ergänzende Überlegungen zur Darstellung und numerischen Behandlung enthalten sind. An späteren Arbeiten sind vor allem die

Untersuchungen von H. C. THACHER Jr. [23], G. W. WHAPLES [29], H. C. THACHER Jr. - W. E. MILNE [25], H. C. THACHER Jr. [24], W. HAUSSMANN [7] und H.-B. KNOOP [11] zu nennen).

Wir gehen bei unseren Untersuchungen von der Theorie der Interpolationssysteme aus, die sich etwa bei P. J. DAVIS [3] und W. HAUSSMANN [7], [8] und [9] findet und die wir in § 1 darstellen. Diese Theorie, die als wichtigen Spezialfall die bekannten Aussagen für Haar-Systeme enthält, erlaubt es uns, das Problem der zweidimensionalen Polynom-Interpolation in einem gewissen Sinne vollständig zu lösen. Dabei zeigen wir nicht nur Existenz und Eindeutigkeit des gesuchten Interpolationspolynoms (§ 2), sondern geben auch eine explizite Darstellung von der Art der eindimensionalen Lagrange-Formel (§ 3). Unser Ergebnis umfaßt insbesondere die Interpolation auf solchen $V(m + 1, n + 1)$ -regulären Gittern (vgl. H.-B. KNOOP [11]), bei denen auf $n + 1$ zur x -Achse parallelen Geraden jeweils $m + 1$ paarweise verschiedene Punkte liegen, die Interpolation auf Gittern, die aus diesen speziellen $V(m + 1, n + 1)$ -regulären Gittern durch Weglassen eines einzigen (beliebig gewählten) Punktes entstehen und im Spezial-

fall eines "Fastrechteckgitters" von W. HAUSSMANN [7] und vorher im Fall von $3 \cdot 3 - 1 = 8$ Punkten auch von W. E. MILNE et al. [14] betrachtet wurden, und schließlich die Interpolation auf sogenannten "Dreiecksanordnungen" ("triangular array"), die in Spezialfällen u. a. in den Arbeiten von H. E. SALZER und in größerer Allgemeinheit etwa von E. ISAACSON und H. B. KELLER [10] behandelt wird.

Im zweiten Kapitel beschäftigen wir uns mit einem Problem, das wir in Anlehnung an H. WERNER [27] als diskrete Čebyšev-Approximationsaufgabe bezeichnen und das sich folgendermaßen skizzieren läßt:

Aufgrund der Ergebnisse des ersten Kapitels gibt es zu jedem Punktgitter des $\mathbb{R}^2$ bei Wahl eines geeigneten Polynomraumes U genau ein Polynom aus U , das an den Punkten des Gitters vorgegebene Zahlen als Funktionswerte annimmt. Wird nun ein weiterer Punkt hinzugefügt und in diesem Punkt eine Zahl als Funktionswert vorgeschrieben, ohne daß der Polynomraum geändert wird, so gibt es im allgemeinen kein Polynom in U , das neben den ursprünglichen Interpolationsbedingungen auch noch diese zusätzliche erfüllt. Wir suchen daher ein Element u^* aus U , das an den gegeb-

nen Punkten zwar nicht die vorgeschriebenen Funktionswerte besitzt, dafür aber die Eigenschaft hat, daß der betragsmäßig größte so auftretende Fehler möglichst klein ist.

Diese Aufgabenstellung ist im Eindimensionalen von entscheidender Bedeutung. Ist nämlich K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$, die mindestens $n + 2$ verschiedene Punkte enthält, und ist $u_0, u_1, \dots, u_n$ ein Haar-System vom Grad n auf K , so läßt sich bei gegebenem $f \in C(K)$ die (existierende und eindeutig bestimmte) Minimallösung $w \in U = \text{span} \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ mit

$$\max_{x \in K} |f(x) - w(x)| = \min_{u \in U} \max_{x \in K} |f(x) - u(x)|$$

mittels des Remez-Algorithmus (vgl. etwa G. MEINARDUS [13] oder H. WERNER und R. SCHABACK [28]) konstruieren, der im wesentlichen in der wiederholten Lösung von diskreten Čebyšev-Approximationsaufgaben besteht. Auch bei der halbdiskreten Approximation im $\mathbb{R}^2$ (vgl. H. EHLICH und W. HAUSSMANN [4]) spielt die Lösung von diskreten Čebyšev-Approximationsaufgaben zumindest in Spezialfällen eine wichtige Rolle, auf die wir in den Schlußbemerkungen kurz eingehen.

Bevor wir die oben dargestellte zweidimensionale diskrete Čebyšev-Approximationsaufgabe behandeln, betrachten wir das allgemeine diskrete Čebyšev-Approximationsproblem, das wir entsprechend dem allgemeinen Interpolationsproblem definieren. Von den drei grundsätzlichen Fragestellungen, nämlich Existenz, Eindeutigkeit und Konstruktion einer Lösung, erledigt sich, anders als beim allgemeinen Interpolationsproblem, die der Existenz sofort: Es gibt stets mindestens eine Lösung des diskreten Čebyšev-Approximationsproblems, die wir unter Benutzung eines Satzes über maximale Funktionale explizit angeben (§ 4). Zur Frage der Eindeutigkeit beweisen wir ein notwendiges und hinreichendes Kriterium und verdeutlichen es an zwei Beispielen. Anschließend wenden wir die solchermaßen entwickelte Theorie in § 5 auf die zweidimensionale diskrete Čebyšev-Approximationsaufgabe an und erhalten eine vollständige Lösung. Im abschließenden Paragraphen 6 betrachten wir als mögliches Beispiel für die Anwendung unserer Überlegungen den Fall der gleichmäßigen Approximation von $h(x,y) = 2^{m-1} 2^{n-1} x^m y^n$ in $[-1,1] \times [-1,1]$ durch Polynome aus $\Pi'_{mn} = \{P : P(x,y) =$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} \cdot x^i y^j, a_{mn} = 0\}$$

und gewinnen so auf einem

anderen Weg die bekannte Aussage von H. EHLICH
und K. ZELLER [5].

Herrn Prof. Dr. Hartmut Ehlich möchte ich für die
Anregung zu dieser Arbeit und für wertvolle Rat-
schläge herzlich danken.

Kapitel I Zur zweidimensionalen Interpolation

§ 1 Das allgemeine Interpolationsproblem und die Theorie der Interpolationssysteme

Wir gehen von der allgemeinen Interpolationsaufgabe aus, wie sie etwa bei P. J. DAVIS [3] und W. HAUSSMANN [7], [8] und [9] formuliert ist:

Gegeben seien ein $(n + 1)$ -dimensionaler linearer Raum U über $\mathbb{R}$ und $n + 1$ lineare Funktionale $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ aus dem algebraischen Dualraum U^* von U . Dann bezeichnen wir das Tupel

$$(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n) = (U; \phi_j : 0 \leq j \leq n)$$

als Interpolationsproblem (IP) und betrachten folgende Fragestellung:

- 1) Unter welchen Voraussetzungen gibt es zu
 $n + 1$ beliebigen reellen Zahlen $f_0, f_1, \dots, f_n$
 stets ein Element $u \in U$, so daß

(1) $\phi_j(u) = f_j, \quad 0 \leq j \leq n$

 gilt?
- 2) Wann ist hierbei u eindeutig bestimmt?

- 3) Läßt sich eine Basis $l_0, l_1, \dots, l_n$ von U so angeben, daß bei vorgegebenen rechten Seiten f_j ($0 \leq j \leq n$)

$$(2) \quad u = \sum_{j=0}^n f_j l_j$$

gilt?

Antwort auf diese Fragen geben zwei Sätze, die sich wieder bei P. J. DAVIS [3] und W. HAUSSMANN [7] [8] und [9] finden:

Satz 1.1:

Das IP $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ besitzt genau dann für beliebige Werte $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte Lösung, wenn die $n + 1$ Funktionale $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ eine Basis von U^* bilden.

Wir nennen ein solches eindeutig lösbares IP

$(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ ein Interpolationssystem (IS).

Satz 1.2:

Es sei $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ ein IS. Dann löst genau die Dualbasis $l_0, l_1, \dots, l_n$ zur Basis $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ das Darstellungsproblem (2).

Ein Kriterium dafür, ob die linearen Funktionale $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n \in U^*$ eine Basis von U^* bilden, liefert bei beliebiger Basis $u_0, u_1, \dots, u_n$ von U die verallgemeinerte Gram'sche Determinante

$$(3) \quad G = \begin{vmatrix} \phi_0(u_0) & \phi_0(u_1) & \dots & \phi_0(u_n) \\ \phi_1(u_0) & \phi_1(u_1) & \dots & \phi_1(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_n(u_0) & \phi_n(u_1) & \dots & \phi_n(u_n) \end{vmatrix}$$

$$= \det(\phi_i(u_j))_{0 \leq i, j \leq n}.$$

Es gilt nämlich (vgl. P. J. DAVIS [3])

Satz 1.3:

Es seien U ein linearer Raum der Dimension $n + 1$ über $\mathbb{R}$, $u_0, u_1, \dots, u_n \in U$, $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n \in U^*$. Je zwei der folgenden Aussagen ziehen die dritte nach sich

- (i) $u_0, u_1, \dots, u_n$ ist Basis von U
- (ii) $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ ist Basis von U^*
- (iii) $G = \det(\phi_i(u_j))_{0 \leq i, j \leq n} \neq 0$

Die Determinante (3) ist also ein nützliches Kriterium, um zu entscheiden, ob ein IP ein IS ist. Darüberhinaus liefert sie eine Methode, die Dualbasis explizit zu berechnen:

Satz 1.4:

Es seien $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ ein IS und $u_0, u_1, \dots, u_n$ eine beliebige Basis von U . Dann bilden die Elemente

$$(4) \quad l_j = \frac{1}{G} \begin{vmatrix} \phi_0(u_0) & \phi_0(u_1) & \dots & \phi_0(u_n) \\ \phi_1(u_0) & \phi_1(u_1) & \dots & \phi_1(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{j-1}(u_0) & \phi_{j-1}(u_1) & \dots & \phi_{j-1}(u_n) \\ u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ \phi_{j+1}(u_0) & \phi_{j+1}(u_1) & \dots & \phi_{j+1}(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_n(u_0) & \phi_n(u_1) & \dots & \phi_n(u_n) \end{vmatrix}$$

$$0 \leq j \leq n,$$

die (eindeutig bestimmte) Dualbasis zur Basis $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$.

Entwickeln der Determinante nach der j -ten Zeile ($0 \leq j \leq n$) zeigt nämlich, daß l_j aus U ist, und

offensichtlich gilt

$$\phi_i(1_j) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq i, j \leq n.$$

Weiter gilt (vgl. P. J. DAVIS [3]):

Satz 1.5:

Es seien $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ ein IS, $u_0, u_1, \dots, u_n$ eine Basis von U und $f_0, f_1, \dots, f_n$ beliebige reelle Zahlen. Dann erfüllt das Element

$$u = -\frac{1}{G} \begin{vmatrix} 0 & u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ f_0 & \phi_0(u_0) & \phi_0(u_1) & \dots & \phi_0(u_n) \\ f_1 & \phi_1(u_0) & \phi_1(u_1) & \dots & \phi_1(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & \phi_n(u_0) & \phi_n(u_1) & \dots & \phi_n(u_n) \end{vmatrix}$$

die Beziehungen (1).

Das bekannte Ergebnis, daß es zu $n + 1$ beliebigen, paarweise verschiedenen Punkten $x_0, x_1, \dots, x_n$ aus dem reellen Intervall $[a, b]$ ($b > a$) und $n + 1$ beliebigen reellen Zahlen $f_0, f_1, \dots, f_n$ genau dann stets ein eindeutig bestimmtes Element $u \in U = \text{span} \{u_0, u_1, \dots, u_n\} \subset C[a, b]$ mit

$$u(x_j) = f_j \quad (0 \leq j \leq n)$$

gibt, wenn die Funktionen $u_0, u_1, \dots, u_n$ ein Haar-System vom Grad n auf $[a, b]$ bilden, ordnet sich mit Hilfe des folgenden Satzes (vgl. H. WERNER [27]) leicht in diese Theorie ein:

Satz 1.6:

Genau dann bilden die $n + 1$ linear unabhängigen Funktionen $u_0, u_1, \dots, u_n \in C[a, b]$ ein Haar-System vom Grad n auf $[a, b]$, wenn für jede Wahl von $n + 1$ paarweise verschiedenen Punkten $x_0, x_1, \dots, x_n$ aus $[a, b]$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} u_0(x_0) & u_1(x_0) & \dots & u_n(x_0) \\ u_0(x_1) & u_1(x_1) & \dots & u_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0(x_n) & u_1(x_n) & \dots & u_n(x_n) \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet.

Bezeichnet ϵ_{x_j} ($0 \leq j \leq n$) das durch

$$\epsilon_{x_j} : U \ni u \longmapsto u(x_j) \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq j \leq n,$$

definierte Punktfunktional aus U^* , so bilden die
 $n + 1$ linear unabhängigen Funktionen $u_0, u_1, \dots, u_n$
also genau dann ein Haar-System vom Grad n auf
 $[a,b]$, wenn für jede Wahl von $n + 1$ paarweise ver-
schiedenen Punkten $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ das
IP $(U; \epsilon_{x_0}, \epsilon_{x_1}, \dots, \epsilon_{x_n})$ ein IS ist.

§ 2 Existenz und Eindeutigkeit des zweidimensionalen Interpolationspolynoms

Im Rechteck

$$[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 (b>a, d>c)$$

sei das "vollständige" Punktgitter

$$W = \bigcup_{j=0}^n \{x_{j0}, x_{j1}, \dots, x_{jm}\} \times \{y_j\}, m, n \in \mathbb{N}_0$$

mit

$$y_j \in [c,d] \quad (0 \leq j \leq n, y_k \neq y_l \text{ für } k \neq l)$$

$$x_{ji} \in [a,b] \quad (0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m, x_{jk} \neq x_{jl} \text{ für } k \neq l)$$

gegeben.

Aus diesem Gitter werden nun auf den einzelnen Geraden

$$G_j = \{(x, y_j) : a \leq x \leq b\}, \quad 0 \leq j \leq n,$$

M_j Punkte entfernt mit $0 \leq M_j \leq m$.

Da wir keine Anordnung der Geraden bzw. der Punkte auf den Geraden vorschreiben, können wir o.B.d.A. folgende Vereinbarungen treffen:

Wir betrachten nun den Polynomraum

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \Pi_{mn}^{(M_0, M_1, \dots, M_n)} &= \text{span} \{1, x, \dots, x^{m-M_0}, y, xy, \dots, x^{m-M_1}y, \\
 &\quad \dots, y^n, xy^n, \dots, x^{m-M_n}y^n\} \\
 &= \text{span} \{x^i y^j : 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m - M_j\} \\
 &= \{P : P(x, y) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-M_j} a_{ij} x^i y^j\}
 \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \dim \Pi_{mn}^{(M_0, M_1, \dots, M_n)} &= \sum_{j=0}^n (m + 1 - M_j) \\
 &= (n + 1)(m + 1) - \sum_{j=0}^n M_j
 \end{aligned}$$

Inbesondere ist

$$\Pi_{mn}^{(0, 0, \dots, 0)} = \Pi_{mn} = \{P : P(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j\}$$

oder allgemein

$$\Pi_{mn}^{(k, k, \dots, k)} = \Pi_{(m-k)n} \quad (0 \leq k \leq m)$$

$$\Pi_{mn}^{(m,m,\dots,m)} = \Pi_{on} = \{P : P(x,y) = \sum_{j=0}^n b_j y^j\}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{mn}^{(0,0,\dots,1)} &= \Pi'_{mn} \\ &= \{P : P(x,y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} x^i y^j, a_{mn} = 0\} \end{aligned}$$

$$\Pi_{mm}^{(0,1,\dots,m)} = \{P : P(x,y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m-i} a_{ij} x^i y^j\}$$

Satz 2.1:

Die Punktfunktionale $\in_{(x_{ji}, y_j)}$ aus (7) sind linear unabhängig auf dem Polynomraum $\Pi_{mn}^{(M_0, M_1, \dots, M_n)}$.

Beweis: Zunächst stimmt wegen (9) die Dimension

von $\Pi_{mn}^{(M_0, M_1, \dots, M_n)}$ mit der Anzahl der Punktfunktionale $\in_{(x_{ji}, y_j)}$ aus (7) überein. Setzt man

$$(10) \quad \begin{bmatrix} 1 & x_{j0} & \dots & x_{j0}^i \\ 1 & x_{j1} & \dots & x_{j1}^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{j(m-M_j)} & \dots & x_{j(m-M_j)}^i \end{bmatrix} = X_j^i$$

und definiert man wie üblich die Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl als Multiplikation sämtlicher Matrixelemente mit der Zahl, so ist also die folgende Determinante definiert:

$$(11) \quad G = \begin{vmatrix} X_0^{m-M_0} & Y_0 X_0^{m-M_1} & \dots & Y_0 X_0^{n-m-M_n} \\ X_1^{m-M_0} & Y_1 X_1^{m-M_1} & \dots & Y_1 X_1^{n-m-M_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n^{m-M_0} & Y_n X_n^{m-M_1} & \dots & Y_n X_n^{n-m-M_n} \end{vmatrix}$$

$$= \det(x_{ji}^k y_j^l) \quad (0 \leq i, j \leq n, \quad 0 \leq i \leq m-M_j, \quad 0 \leq k \leq m-M_1)$$

Es ist

$$G = \begin{vmatrix} X_0^{m-M_0} & (Y_0 - Y_0) X_0^{m-M_1} & \dots & Y_0^{n-1} (Y_0 - Y_0) X_0^{m-M_n} \\ X_1^{m-M_0} & (Y_1 - Y_0) X_1^{m-M_1} & \dots & Y_1^{n-1} (Y_1 - Y_0) X_1^{m-M_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n^{m-M_0} & (Y_n - Y_0) X_n^{m-M_1} & \dots & Y_n^{n-1} (Y_n - Y_0) X_n^{m-M_n} \end{vmatrix}$$

$$= (Y_1 - Y_0)^{m-M_1+1} (Y_2 - Y_0)^{m-M_2+1} \dots (Y_n - Y_0)^{m-M_n+1} \times$$

$$\times \prod_{0 \leq l < k \leq m-M_0} (x_{ok} - x_{ol}) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} x_1^{m-M_1} & y_1 x_1^{m-M_2} & \dots & y_1^{n-1} x_1^{m-M_n} \\ x_2^{m-M_1} & y_2 x_2^{m-M_2} & \dots & y_2^{n-1} x_2^{m-M_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{m-M_1} & y_n x_n^{m-M_2} & \dots & y_n^{n-1} x_n^{m-M_n} \end{vmatrix}$$

$$= \dots = \prod_{j=1}^n (y_j - y_0)^{m-M_j+1} \dots \prod_{j=n-1}^n (y_j - y_{n-2})^{m-M_j+1} \times$$

$$\times \prod_{0 \leq l < k \leq m-M_0} (x_{ok} - x_{ol}) \dots \prod_{0 \leq l < k \leq m-M_{n-2}} (x_{(n-2)k} - x_{(n-2)l}) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} x_{n-1}^{m-M_{n-1}} & y_{n-1} x_{n-1}^{m-M_n} \\ x_n^{m-M_{n-1}} & y_n x_n^{m-M_n} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{0 \leq i < j \leq n} (y_j - y_i)^{m-M_j+1} \prod_{s=0}^n \left(\prod_{0 \leq l < k \leq m-M_s} (x_{sk} - x_{sl}) \right)$$

Somit gilt:

$$(12) \quad G = \prod_{s=0}^n \left(\prod_{0 \leq i < k \leq m-M_s} (x_{sk} - x_{sl}) \right) \times \\ \times \prod_{0 \leq i < j \leq n} (y_j - y_i)^{m-M_j+1}$$

Wegen

$$x_{jk} \neq x_{jl}, \quad k \neq l \quad (0 \leq j \leq n),$$

$$y_k \neq y_l, \quad k \neq l,$$

folgt aus (12) das Nichtverschwinden von G und hiermit gemäß Satz 1.3 die lineare Unabhängigkeit der Punktfunktionale $\in_{(x_{ji}, y_j)}$ aus (7) auf dem Polynomraum $\Pi_{mn}^{(M_0, M_1, \dots, M_n)}$.

Korollar 2.2:

Das IP

$$(\Pi_{mn}^{(M_0, M_1, \dots, M_n)}; \in_{(x_{ji}, y_j)} : 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m-M_j)$$

ist ein IS.

Bemerkung 2.3:

Die Voraussetzung $M_n \leq m$ in (5) stellt keine Einschränkung dar. Will man nämlich auf den Geraden $G_{r+1}, \dots, G_n$ ($0 \leq r \leq n-1$) alle $m+1$ Punkte entfernen, so kann man dies tun, muß aber dann den Polynomraum $\Pi_{mr}^{(M_0, M_1, \dots, M_r)}$ betrachten. Speziell erhält man für $r = 0$:

$$\Pi_{m0}^{(M_0)} = \{P : P(x,y) = \sum_{i=0}^{m-M_0} b_i x^i\}.$$

§ 3 Darstellung des zweidimensionalen Interpolationspolynoms

Nach Satz 1.2 löst die Dualbasis l_{ji} ($0 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq m - M_j$) zu den Funktionalen $\epsilon_{(x_{ji}, y_j)}$ aus (7) das Darstellungsproblem. Diese Dualbasiselemente l_{ji} bestimmen sich gemäß

Satz 3.1:

Setzt man für $0 \leq t \leq n$, $0 \leq s \leq m - M_t$

$$g_{ts}(x, y) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq s}}^{m-M_t} \frac{x - x_{tk}}{x_{ts} - x_{tk}} \prod_{l=0}^{t-1} \frac{y - y_l}{y_t - y_l}$$

$$m_j = \max_{j \leq k \leq n} \{k : M_k = M_j\}$$

$$G_{ji}^{(m_j)}(x, y) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m-M_j} \frac{x - x_{jk}}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{m_j} \frac{y - y_l}{y_j - y_l}$$

$$G_{ji}^{(r)}(x, y) = - \sum_{k=0}^{m-M_r} \sum_{l=m_j}^{r-1} G_{ji}^{(1)}(x_{rk}, y_r) g_{rk}(x, y),$$

$$m_j + 1 \leq r \leq n,$$

dann ist l_{ji} ($0 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq m - M_j$) mit

$$l_{ji}(x, y) = \sum_{k=m_j}^n G_{ji}^{(k)}(x, y)$$

das zum Punktfunktional $\in_{(x_{ji}, y_j)}$ gehörende Element der Dualbasis.

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß l_{ji} ein Element von $\Pi_{mn}^{(M_0, M_1, \dots, M_n)}$ ist. Es gilt wegen

$$\begin{aligned} G_{ji}^{(m_j)}(x, y) &= \left(\sum_{k=0}^{m-M_j} a_k x^k \right) \left(\sum_{l=0}^{m_j} b_l y^l \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-M_j} \sum_{l=0}^{m_j} c_{kl} x^k y^l \end{aligned}$$

$$(13) \quad G_{ji}^{(m_j)} \in \Pi_{mn}^{(M_0, M_1, \dots, M_n)}.$$

Für $m_j + 1 \leq t \leq n$, $0 \leq s \leq m - M_t$ gilt

$$\begin{aligned} g_{ts}(x, y) &= \left(\sum_{k=0}^{m-M_t} a_k x^k \right) \left(\sum_{l=0}^t b_l y^l \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-M_t} \sum_{l=0}^t c_{kl} x^k y^l \end{aligned}$$

und daher

$$(14) \quad G_{ji}^{(k)} \in \Pi_{mn}^{(M_0, M_1, \dots, M_n)}, m_j + 1 \leq k \leq n.$$

Aus (13) und (14) folgt

$$l_{ji} = \sum_{k=m_j}^n G_{ji}^{(k)} \in \Pi_{mn}^{(M_0, M_1, \dots, M_n)}.$$

Als nächstes zeigen wir die Dualitätseigenschaft:

$$(15) \quad l_{ji}(x_{ts}, y_t) = \begin{cases} 1 & \text{für } (j, i) = (t, s) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$0 \leq j, t \leq n, 0 \leq i \leq m - M_j, 0 \leq s \leq m - M_t.$$

Hierzu treffen wir folgende Fallunterscheidung:

$$a) \quad \underline{0 \leq t \leq m_j, t \neq j}$$

Dann ist

$$G_{ji}^{(m_j)}(x_{ts}, y_t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m-M_j} \frac{x_{ts} - x_{jk}}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{m_j} \frac{y_t - y_l}{y_j - y_l} = 0.$$

Entsprechend gilt für $m_j + 1 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq m - M_k$

$$g_{kl}(x_{ts}, y_t) = 0$$

und somit auch

$$G_{ji}^{(k)}(x_{ts}, y_t) = 0, \quad m_j + 1 \leq k \leq n,$$

insgesamt also

$$l_{ji}(x_{ts}, y_t) = 0.$$

b) $t = j$

In diesem Fall ist

$$G_{ji}^{(m_j)}(x_{js}, y_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m-M_j} \frac{x_{js} - x_{jk}}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{m_j} \frac{y_j - y_l}{y_j - y_l} = \delta_{is}.$$

Wie bei a) überlegt man sich, daß wegen $m_j \geq j$ für $m_j + 1 \leq k \leq n$

$$G_{ji}^{(k)}(x_{js}, y_j) = 0$$

gilt. Daher folgt

$$l_{ji}(x_{js}, y_j) = \sum_{k=m_j}^n G_{ji}^{(k)}(x_{js}, y_j) = G_{ji}^{(m_j)}(x_{js}, y_j) = \delta_{is}.$$

$$c) \quad \underline{m_j + 1 \leq t \leq n}$$

Wie bei a) folgt wieder, daß für $k \geq t + 1$

$$G_{ji}^{(k)}(x_{ts}, y_t)$$

verschwindet. Daher erhält man

$$l_{ji}(x_{ts}, y_t) = \sum_{k=m_j}^t G_{ji}^{(k)}(x_{ts}, y_t).$$

Nun ist

$$G_{ji}^{(t)}(x_{ts}, y_t)$$

$$= - \sum_{p=0}^{m-M_t} \sum_{r=m_j}^{t-1} G_{ji}^{(r)}(x_{tp}, y_t) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{m-M_t} \frac{x_{ts} - x_{tk}}{x_{tp} - x_{tk}} \prod_{l=0}^{t-1} \frac{y_t - y_l}{y_t - y_l}$$

$$= - \sum_{r=m_j}^{t-1} G_{ji}^{(r)}(x_{ts}, y_t)$$

Daher gilt

$$l_{ji}(x_{ts}, y_t) = \sum_{k=m_j}^{t-1} G_{ji}^{(k)}(x_{ts}, y_t) + G_{ji}^{(t)}(x_{ts}, y_t) = 0.$$

Aus a), b) und c) folgt die Dualitätseigenschaft (15)

und somit insgesamt die Aussage des Satzes 3.1._

Offensichtlich gilt auch folgende Darstellung für die Elemente der Dualbasis:

$$(16) \quad l_{ji}(x, y) = \sum_{k=j}^n G'_{ji}^{(k)}(x, y),$$

$0 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq m - M_j$, mit

$$(17) \quad G'_{ji}^{(j)}(x, y) = g_{ji}(x, y)$$

$$(18) \quad G'_{ji}^{(k)}(x, y) = - \sum_{p=0}^{m-M_k} \sum_{r=j}^{k-1} G'_{ji}^{(r)}(x_{kp}, y_k) g_{kp}(x, y),$$

$$j + 1 \leq k \leq n.$$

Beispiel 3.2

Wir betrachten das "vollständige" Punktgitter

$$(19) \quad W = \bigcup_{j=0}^n \{x_{j0}, x_{j1}, \dots, x_{jm}\} \times \{y_j\}$$

mit $y_k \neq y_l$, $k \neq l$ und $x_{jk} \neq x_{jl}$, $k \neq l$ ($0 \leq j \leq n$).

Somit gilt $M_0 = M_1 = \dots = M_n = 0$. Nach Korollar

2.2 ist das Tupel

$$(\pi_{mn}; \in_{(x_{ji}, y_j)} : 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m)$$

ein IS. Gemäß Satz 3.1 gilt wegen

$$m_j = \max_{j \leq k \leq n} \{k : M_k = M_j\} = n \quad \text{für alle } 0 \leq j \leq n$$

für die Elemente der Dualbasis:

$$l_{ji}(x, y) = \sum_{k=n}^n G_{ji}^{(k)}(x, y) = G_{ji}^{(n)}(x, y)$$

$$= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - x_{jk}}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{y - y_l}{y_j - y_l}$$

Insgesamt erhalten wir:

Zu gegebenen reellen Zahlen f_{ji} ($0 \leq j \leq n$,
 $0 \leq i \leq m$) ist

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_{ji} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - x_{jk}}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{y - y_l}{y_j - y_l}$$

das eindeutig bestimmte Polynom aus π_{mn} mit der Eigenschaft

$$P(x_{ji}, y_j) = f_{ji}, \quad (x_{ji}, y_j) \in W.$$

Beispiel 3.3

Wir betrachten das "verminderte" Punktgitter W' , das aus W (vgl. (19)) durch Weglassen eines einzigen (beliebig gewählten) Punktes entsteht. O.B.d.A. können wir

$$(20) \quad W' = W \setminus \{(x_{nm}, y_n)\}$$

annehmen, d. h. $M_0 = M_1 = \dots = M_{n-1} = 0, M_n = 1$.

Das Tupel

$$(\pi'_{mn}; \in_{(x_{ji}, y_j)} : (x_{ji}, y_j) \in W')$$

ist nach Korollar 2.2 ein IS. Satz 3.1 liefert mit $m_j = n - 1$ ($0 \leq j \leq n - 1$) für die Dualbasis für $0 \leq j \leq n - 1, 0 \leq i \leq m$

$$G_{ji}^{(n-1)}(x, y) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - x_{jk}}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{n-1} \frac{y - y_l}{y_j - y_l}$$

$$G_{ji}^{(n)}(x, y) = - \sum_{r=0}^{m-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - x_{jk}}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{n-1} \frac{y - y_l}{y_j - y_l} \times$$

$$\times \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq r}}^{m-1} \frac{x - x_{ns}}{x_{nr} - x_{ns}} \prod_{t=0}^{n-1} \frac{y - y_t}{y_n - y_t}$$

und somit

$$l_{ji}(x, y) =$$

$$= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - x_{jk}}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{n-1} \frac{y - y_l}{y_j - y_l} \\ - \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{n-1} \frac{y_n - y_l}{y_j - y_l} \prod_{t=0}^{n-1} \frac{y - y_t}{y_n - y_t} \cdot$$

$$\cdot \sum_{r=0}^{m-1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x_{nr} - x_{jk}}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq r}}^{m-1} \frac{x - x_{ns}}{x_{nr} - x_{ns}}$$

und für $0 \leq i \leq m-1$

$$l_{ni}(x, y) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m-1} \frac{x - x_{nk}}{x_{ni} - x_{nk}} \prod_{l=0}^{n-1} \frac{y - y_l}{y_n - y_l}$$

Eine einfachere Darstellung der Dualbasiselemente l_{ji} ($0 \leq j \leq n-1$, $0 \leq i \leq m$) erhält man mit Hilfe der Determinantendarstellung aus Satz 1.4:

$$l_{ji}(x, y) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - x_{jk}}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{y - y_l}{y_j - y_l} -$$

$$- \frac{\prod_{k=0}^{m-1} (x-x_{nk}) \prod_{l=0}^{n-1} (y-y_l)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m (x_{ji}-x_{jk}) \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n (y_j-y_l)},$$

$$0 \leq j \leq n-1, 0 \leq i \leq m.$$

Somit ist zu gegebenen reellen Zahlen f_{ji}

$$(0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m, (j,i) \neq (n,m))$$

$$P'(x,y) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^m f_{ji} \left\{ \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x-x_{jk}}{x_{ji}-x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{y-y_l}{y_j-y_l} \right.$$

$$\left. - \frac{\prod_{k=0}^{m-1} (x-x_{nk}) \prod_{l=0}^{n-1} (y-y_l)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m (x_{ji}-x_{jk}) \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n (y_j-y_l)} \right\}$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-1} f_{ni} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m-1} \frac{x-x_{nk}}{x_{ni}-x_{nk}} \prod_{l=0}^{n-1} \frac{y-y_l}{y_n-y_l}$$

das eindeutig bestimmte Polynom aus Π'_{mn} mit

$$P'(x_{ji}, y_j) = f_{ji}, (x_{ji}, y_j) \in W'.$$

Kapitel II Zur zweidimensionalen diskreten Čebyšev- Approximation

§ 4 Das allgemeine diskrete Čebyšev-Approximations- problem und die Theorie der diskreten Čebyšev- Approximationssysteme

In Anlehnung an die Aufgabenstellung des allgemeinen Interpolationsproblems betrachten wir die folgende verallgemeinerte diskrete Čebyšev-Approximationsaufgabe:

U sei ein linearer Raum der Dimension $n + 1$ über $\mathbb{R}$,
und $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1}$ seien $n + 2$ lineare Funktionale
aus dem algebraischen Dualraum U^* von U . Dann nennen
wir das Tupel

$$(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1}) = (U; \phi_j : 0 \leq j \leq n + 1)$$

ein diskretes Čebyšev-Approximationsproblem ($\check{D}\check{C}AP$)

und suchen zu gegebenen reellen Zahlen $f_0, f_1, \dots, f_{n+1}$
ein Element $u^* \in U$, so daß

$$(21) \quad \max_{0 \leq j \leq n+1} |\phi_j(u^*) - f_j| \leq \max_{0 \leq j \leq n+1} |\phi_j(u) - f_j|$$

ist für alle $u \in U$.

Anders als beim allgemeinen Interpolationsproblem ist die Existenz einer Lösung stets gesichert:

Satz 4.1:

Es existiert stets (mindestens) ein $u^* \in U$ mit der Eigenschaft (21).

Beweis:

Sei $u_0, u_1, \dots, u_n$ eine Basis von U und $E_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ der von den Vektoren $(\phi_0(u_i), \phi_1(u_i), \dots, \phi_{n+1}(u_i))$, $0 \leq i \leq n$, aufgespannte, höchstens $(n+1)$ - dimensionale Teilraum von $\mathbb{R}^{n+2}$.

Versehen wir - wie auch im folgenden stets - den $\mathbb{R}^{n+2}$ mit der Norm

$$\|(a_0, a_1, \dots, a_{n+1})\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq n+1} |a_j|,$$

so gibt es bekanntlich (vgl. etwa N. I. ACHIESER [1]) zu jedem $(f_0, f_1, \dots, f_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ mindestens ein Element

$$\tilde{u}^* = \sum_{i=0}^n b_i^* (\phi_0(u_i), \phi_1(u_i), \dots, \phi_{n+1}(u_i)) \in E_{n+1}$$

mit

$$(22) \quad \|\tilde{u}^* - (f_0, f_1, \dots, f_{n+1})\|_\infty$$

$$= \max_{0 \leq j \leq n+1} \left| \sum_{i=0}^n b_i^* \phi_j(u_i) - f_j \right|$$

$$\leq \max_{0 \leq j \leq n+1} \left| \sum_{i=0}^n b_i \phi_j(u_i) - f_j \right|$$

$$= \|\tilde{u} - (f_0, f_1, \dots, f_{n+1})\|_\infty$$

$$\text{für alle } \tilde{u} = \sum_{i=0}^n b_i (\phi_0(u_i), \phi_1(u_i), \dots, \phi_{n+1}(u_i))$$

$$\in E_{n+1}. \quad u^* = \sum_{i=0}^n b_i^* u_i \text{ besitzt die Eigenschaft (21).}$$

$$\text{Andernfalls gäbe es ein } u' = \sum_{i=0}^n b_i' u_i \text{ aus } U \text{ mit}$$

$$\max_{0 \leq j \leq n+1} |\phi_j(u') - f_j| < \max_{0 \leq j \leq n+1} |\phi_j(u^*) - f_j|.$$

Hieraus würde

$$\max_{0 \leq j \leq n+1} \left| \sum_{i=0}^n b_i' \phi_j(u_i) - f_j \right| <$$

$$\leq \max_{0 \leq j \leq n+1} \left| \sum_{i=0}^n b_i^* \phi_j(u_i) - f_j \right|$$

folgen, im Widerspruch zu (22). _

Aus der Theorie der Approximation in normierten linearen Räumen ist der folgende Charakterisierungssatz bekannt (vgl. etwa A. SCHÖNHAGE [20], I. SINGER [21]):

Satz 4.2:

Sei E ein normierter linearer Raum, U ein linearer Teilraum von E , f ein beliebiges Element aus E und $u_0 \in U$. Gibt es dann ein Funktional F aus dem topologischen Dual E' mit

- (i) $\|F\| \leq 1$,
- (ii) $F(u) = 0$ für alle $u \in U$,
- (iii) $|F(f)| = \|f - u_0\|$,

so ist u_0 beste Approximation an f bezüglich U .

Analog hierzu formulieren wir ein auf unsere Aufgabenstellung zugeschnittenes Kriterium:

Satz 4.3:

Gegeben seien das DČAP $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1})$ sowie die $n + 2$ reellen Zahlen $f_0, f_1, \dots, f_{n+1}$. Gibt es zu $u^* \in U$ ein auf dem $\mathbb{R}^{n+2}$ definiertes und dort stetiges lineares Funktional F mit

- (i) $\|F\|_{\infty} \leq 1,$
- (ii) $F(\phi_0(u), \phi_1(u), \dots, \phi_{n+1}(u)) = 0$ für alle $u \in U,$
- (iii) $|F(f_0, f_1, \dots, f_{n+1})| = \max_{0 \leq j \leq n+1} |\phi_j(u^*) - f_j|,$

dann besitzt u^* die Eigenschaft (21).

Beweis:

Für beliebiges $u \in U$ gilt:

$$\begin{aligned}
 & \max_{0 \leq j \leq n+1} |\phi_j(u^*) - f_j| \\
 &= |F(f_0, f_1, \dots, f_{n+1})| \\
 &= |F(f_0, f_1, \dots, f_{n+1}) - F(\phi_0(u), \phi_1(u), \dots, \phi_{n+1}(u))| \\
 &= |F(f_0 - \phi_0(u), f_1 - \phi_1(u), \dots, f_{n+1} - \phi_{n+1}(u))| \\
 &\leq \|F\|_{\infty} \|(f_0 - \phi_0(u), f_1 - \phi_1(u), \dots, f_{n+1} - \phi_{n+1}(u))\|_{\infty} \\
 &\leq \max_{0 \leq j \leq n+1} |f_j - \phi_j(u)|.
 \end{aligned}$$

Definition 4.4:

Das DČAP $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1})$ bildet zusammen mit den $n + 2$ Zahlen $s_0, s_1, \dots, s_{n+1}$ ($s_j = \pm 1$, $0 \leq j \leq n + 1$) ein diskretes Čebyšev-Approximations-system (DČAS)

$$(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1}; s_0, s_1, \dots, s_{n+1}),$$

wenn für die Determinante D mit

$$(23) \quad D = \begin{vmatrix} s_0 & \phi_0(u_0) & \phi_0(u_1) & \dots & \phi_0(u_n) \\ s_1 & \phi_1(u_0) & \phi_1(u_1) & \dots & \phi_1(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n+1} & \phi_{n+1}(u_0) & \phi_{n+1}(u_1) & \dots & \phi_{n+1}(u_n) \end{vmatrix}$$

und die Unterdeterminanten D_j ($0 \leq j \leq n + 1$), die aus D durch Streichen der allerersten Spalte und der j -ten Zeilen hervorgehen, die Beziehung

$$(24) \quad |D| = \sum_{j=0}^{n+1} |D_j| \neq 0$$

gilt. Hierbei ist $u_0, u_1, \dots, u_n$ eine beliebige Basis von U.

Die Eigenschaft des Tupels $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1}; s_0, s_1, \dots, s_{n+1})$, ein DČAS zu sein, hängt dabei

offensichtlich nur von dem DČAP $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1})$ und den Zahlen $s_0, s_1, \dots, s_{n+1}$, nicht aber von der speziellen Wahl der Basis $u_0, u_1, \dots, u_n$ von U ab.

Zunächst gilt der

Satz 4.5:

Gibt es zu dem DČAP $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1})$ einen Index $j_0 \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ derart, daß das IP $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{j_0-1}, \phi_{j_0+1}, \dots, \phi_{n+1})$ ein IS ist, so gibt es $n+2$ Zahlen, $s_0, s_1, \dots, s_{n+1}$ ($s_j = \pm 1, 0 \leq j \leq n+1$), für die das Tupel $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1}; s_0, s_1, \dots, s_{n+1})$ ein DČAS ist.

Beweis:

O.B.d.A. können wir annehmen, daß $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ ein IS ist. Mit

$$(25) \quad D_j = \begin{vmatrix} \phi_0(u_0) & \phi_0(u_1) & \dots & \phi_0(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{j-1}(u_0) & \phi_{j-1}(u_1) & \dots & \phi_{j-1}(u_n) \\ \phi_{j+1}(u_0) & \phi_{j+1}(u_1) & \dots & \phi_{j+1}(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n+1}(u_0) & \phi_{n+1}(u_1) & \dots & \phi_{n+1}(u_n) \end{vmatrix},$$

$0 \leq j \leq n + 1$, gilt also

$$(26) \quad D_{n+1} \neq 0.$$

Sodann setzen wir für $0 \leq j \leq n + 1$

$$s_j = \begin{cases} 1 & \text{für } D_j = 0 \\ (-1)^j \operatorname{sign} [D_j] & \text{für } D_j \neq 0 \end{cases}$$

Mit den so definierten s_j ist $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1};$

$s_0, s_1, \dots, s_{n+1})$ wegen

$$|D| = \left| \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j s_j D_j \right| = \sum_{j=0}^{n+1} |D_j| \neq 0$$

ein DČAS. _

Mit Hilfe von diskreten Čebyšev-Approximations-
systemen können wir nun die verallgemeinerte dis-
krete Čebyšev-Approximationsaufgabe lösen:

Satz 4.6:

Es sei $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1}; s_0, s_1, \dots, s_{n+1})$
ein DČAS. Dann gilt:

- 1) Es gibt mindestens einen Index j_0 , so daß die Funktionale

$$\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{j_0-1}, \phi_{j_0+1}, \dots, \phi_{n+1}$$

linear unabhängig sind auf U . Die zugehörige Dualbasis in U sei

$$l_0, l_1, \dots, l_{j_0-1}, l_{j_0+1}, \dots, l_{n+1}.$$

- 2) Sind $f_0, f_1, \dots, f_{n+1}$ irgendwelche beliebigen reellen Zahlen und bilden $u_0, u_1, \dots, u_n$ eine Basis von U , so besitzt

$$(27) \quad u^* = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j_0}}^{n+1} (f_j - s_j \eta(f_0, f_1, \dots, f_{n+1})) l_j$$

mit

$$(28) \quad \eta(a_0, \dots, a_{n+1}) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_0 & \phi_0(u_0) & \dots & \phi_0(u_n) \\ a_1 & \phi_1(u_0) & \dots & \phi_1(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} & \phi_{n+1}(u_0) & \dots & \phi_{n+1}(u_n) \end{vmatrix},$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2},$$

die Eigenschaft (21).

- 3) Das DČAP $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1})$ besitzt genau dann für beliebige $f_0, f_1, \dots, f_{n+1} \in \mathbb{R}$ stets eine eindeutig bestimmte Lösung, wenn die gemäß (25) definierten Unterdeterminanten D_j für alle $0 \leq j \leq n+1$ von Null verschieden sind.

Beweis:

Aus $\sum_{j=0}^{n+1} |D_j| \neq 0$ folgt zunächst, daß mindestens eine

der Unterdeterminanten D_j nicht verschwindet. Sei dies etwa D_{j_0} . Das bedeutet aber gerade, daß die

Funktionale $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{j_0-1}, \phi_{j_0+1}, \dots, \phi_{n+1}$ linear unabhängig auf U sind.

Wir untersuchen nun die Eigenschaften des Funktionals η . Offenbar ist η linear. Für ein beliebiges $(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ mit

$$\|(a_0, a_1, \dots, a_{n+1})\|_{\infty} \leq 1$$

gilt wegen (24)

$$|\eta(a_0, \dots, a_{n+1})| = \frac{|\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j a_j D_j|}{|D|} \leq \frac{\sum_{j=0}^{n+1} |a_j| |D_j|}{\sum_{j=0}^{n+1} |D_j|}$$

$$\leq \max_{0 \leq k \leq n+1} |a_k| \frac{\sum_{j=0}^{n+1} |D_j|}{\sum_{j=0}^{n+1} |D_j|} \leq 1.$$

Daher ist η ein stetiges lineares Funktional auf $\mathbb{R}^{n+2}$ mit $\|\eta\|_{\infty} \leq 1$.

Für ein beliebiges Element $u = \sum_{j=0}^n a_j u_j \in U$ gilt:

$$\eta(\phi_0(u), \phi_1(u), \dots, \phi_{n+1}(u))$$

$$= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sum_{j=0}^n a_j \phi_0(u_j) & \phi_0(u_0) & \dots & \phi_0(u_n) \\ \sum_{j=0}^n a_j \phi_1(u_j) & \phi_1(u_0) & \dots & \phi_1(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=0}^n a_j \phi_{n+1}(u_j) & \phi_{n+1}(u_0) & \dots & \phi_{n+1}(u_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Gemäß Satz 1.5 gilt mit

$$d_j = f_j - s_j \eta(f_0, f_1, \dots, f_{n+1})$$

$$u^* = - \frac{1}{D_{j_0}} \begin{vmatrix} 0 & u_0 & \dots & u_n \\ d_0 & \phi_0(u_0) & \dots & \phi_0(u_n) \\ d_1 & \phi_1(u_0) & \dots & \phi_1(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{j_0-1} & \phi_{j_0-1}(u_0) & \dots & \phi_{j_0-1}(u_n) \\ d_{j_0+1} & \phi_{j_0+1}(u_0) & \dots & \phi_{j_0+1}(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n+1} & \phi_{n+1}(u_0) & \dots & \phi_{n+1}(u_n) \end{vmatrix}$$

Daher ist $\phi_{j_0}(u^*)$

$$= - \frac{(-1)^{j_0}}{D_{j_0}} \begin{vmatrix} d_0 & \phi_0(u_0) & \dots & \phi_0(u_n) \\ d_1 & \phi_1(u_0) & \dots & \phi_1(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{j_0-1} & \phi_{j_0-1}(u_0) & \dots & \phi_{j_0-1}(u_n) \\ 0 & \phi_{j_0}(u_0) & \dots & \phi_{j_0}(u_n) \\ d_{j_0+1} & \phi_{j_0+1}(u_0) & \dots & \phi_{j_0+1}(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n+1} & \phi_{n+1}(u_0) & \dots & \phi_{n+1}(u_n) \end{vmatrix}$$

$$= - \frac{(-1)^{j_0}}{D_{j_0}} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j_0}}^{n+1} (-1)^j d_j D_j$$

$$\begin{aligned}
 &= - \frac{(-1)^{j_0}}{D_{j_0}} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j d_j D_j + d_{j_0} \\
 &= - \frac{(-1)^{j_0}}{D_{j_0}} \left\{ \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j f_j D_j \right. \\
 &\quad \left. - \eta(f_0, f_1, \dots, f_{n+1}) \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j s_j D_j \right\} + d_{j_0} \\
 &= f_{j_0} - s_{j_0} \eta(f_0, f_1, \dots, f_{n+1}).
 \end{aligned}$$

Da nach Konstruktion von u^*

$$\phi_j(u^*) = f_j - s_j \eta(f_0, f_1, \dots, f_{n+1})$$

für $0 \leq j \leq n+1$, $j \neq j_0$ gilt, folgt insgesamt

$$(29) \quad \phi_j(u^*) = f_j - s_j \eta(f_0, f_1, \dots, f_{n+1}),$$

$0 \leq j \leq n+1$, und hiermit

$$\begin{aligned}
 &\max_{0 \leq j \leq n+1} |\phi_j(u^*) - f_j| \\
 &= \max_{0 \leq j \leq n+1} |f_j - s_j \eta(f_0, f_1, \dots, f_{n+1}) - f_j| \\
 &= \max_{0 \leq j \leq n+1} |-s_j \eta(f_0, f_1, \dots, f_{n+1})|
 \end{aligned}$$

$$= |\eta(f_0, f_1, \dots, f_{n+1})|$$

Nach Satz 4.3 besitzt u^* die Eigenschaft (21).

Wir zeigen als nächstes, daß das Nichtverschwinden sämtlicher D_j notwendig dafür ist, daß für beliebige $f_0, f_1, \dots, f_{n+1} \in \mathbb{R}$ die Lösung stets eindeutig bestimmt ist.

Sei hierzu $(f_0, f_1, \dots, f_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ so, daß

$\eta(f_0, f_1, \dots, f_{n+1}) \neq 0$ ist. Mit $D_{j_1} = 0$ besitzt

dann auch

$$u^{**} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j_0, j_1}}^{n+1} (f_j - s_j \eta(f_0, \dots, f_{n+1})) l_j + f_{j_1} l_{j_1} + u^*$$

die Eigenschaft (21). Denn offensichtlich gilt

$$\phi_j(u^{**}) = f_j - s_j \eta(f_0, f_1, \dots, f_{n+1}), \quad 0 \leq j \leq n+1, \\ j \neq j_0, j_1,$$

$$\phi_{j_1}(u^{**}) = f_{j_1},$$

und

$$\phi_{j_0}(u^{**}) = - \frac{(-1)^{j_0}}{D_{j_0}} \left\{ \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j_0, j_1}}^{n+1} (-1)^j d_j D_j + (-1)^{j_1} f_{j_1} D_{j_1} \right\}$$

$$= - \frac{(-1)^{j_0}}{D_{j_0}} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j d_j D_j + d_{j_0}$$

$$= f_{j_0} - s_{j_0} \eta(f_0, f_1, \dots, f_{n+1})$$

Hieraus folgt

$$\max_{0 \leq j \leq n+1} |\phi_j(u^{**}) - f_j|$$

$$= \max \left\{ \max_{\substack{0 \leq j \leq n+1 \\ j \neq j_1}} |f_j - s_j \eta(f_0, f_1, \dots, f_{n+1}) - f_j|, 0 \right\}$$

$$= |\eta(f_0, f_1, \dots, f_{n+1})|$$

Somit ist u^{**} Lösung der diskreten Čebyšev-Approximationsaufgabe.

Bevor wir zeigen, daß das Nichtverschwinden sämtlicher D_j hinreichend ist für die Eindeutigkeit, beweisen wir den folgenden

Hilfssatz 4.7:

Ist $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1}; s_0, s_1, \dots, s_{n+1})$ ein DČAS mit

$$(30) \quad D_j \neq 0, \quad 0 \leq j \leq n+1,$$

und gilt für ein $u \in U$

$$(31) \quad \varepsilon s_j \phi_j(u) \geq 0, \quad 0 \leq j \leq n+1, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

so ist u das Nullelement von U .

Beweis:

Mit $u_0, u_1, \dots, u_n$ als Basis von U sei

$$u = \sum_{j=0}^n a_j u_j. \quad \text{Wegen (30),}$$

$$D = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j s_j D_j$$

und

$$|D| = \sum_{j=0}^{n+1} |D_j|$$

gilt für die Summanden

$$(-1)^j s_j D_j \geq 0 \quad \text{für alle } 0 \leq j \leq n+1$$

oder

$$(-1)^j s_j D_j \leq 0 \quad \text{für alle } 0 \leq j \leq n+1.$$

Aus (31) folgt für alle $0 \leq j \leq n+1$ entweder

$$\text{sign} [\phi_j(u)] = \begin{cases} 0 & \text{für } \phi_j(u) = 0 \\ \text{sign} [s_j] = s_j & \text{sonst} \end{cases}$$

oder

$$\text{sign} [\phi_j(u)] = \begin{cases} 0 & \text{für } \phi_j(u) = 0 \\ -\text{sign} [s_j] = -s_j & \text{sonst} \end{cases}$$

Daher gilt

$$(32) \quad (-1)^j \phi_j(u) D_j \geq 0 \text{ für alle } 0 \leq j \leq n+1$$

oder

$$(32') \quad (-1)^j \phi_j(u) D_j \leq 0 \text{ für alle } 0 \leq j \leq n+1$$

Nun ist

$$0 = D - \begin{vmatrix} s_0 & \phi_0(u_0) & \dots & \phi_0(u_n) \\ s_1 & \phi_1(u_0) & \dots & \phi_1(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n+1} & \phi_{n+1}(u_0) & \dots & \phi_{n+1}(u_n) \end{vmatrix}$$

$$= D - \begin{vmatrix} s_0 - \sum_{j=0}^n a_j \phi_0(u_j) & \phi_0(u_0) & \dots & \phi_0(u_n) \\ s_1 - \sum_{j=0}^n a_j \phi_1(u_j) & \phi_1(u_0) & \dots & \phi_1(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n+1} - \sum_{j=0}^n a_j \phi_{n+1}(u_j) & \phi_{n+1}(u_0) & \dots & \phi_{n+1}(u_n) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j s_j D_j - \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (s_j - \phi_j(u)) D_j \\
 &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \phi_j(u) D_j
 \end{aligned}$$

Wegen (32) bzw. (32') folgt hieraus

$$(-1)^j \phi_j(u) D_j = 0 \quad \text{für } 0 \leq j \leq n+1$$

und somit wegen (30)

$$\phi_j(u) = 0 \quad \text{für } 0 \leq j \leq n+1$$

Da je $n+1$ Funktionale ϕ_j auf U linear unabhängig sind, folgt hieraus, daß u das Nullelement von U ist. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir nehmen nun also an, (30) sei erfüllt. Dann ist

$$(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1}; s_0, s_1, \dots, s_{n+1})$$

mit $s_j = (-1)^j \text{sign} [D_j]$, $0 \leq j \leq n+1$, ein DČAS (vgl. Beweis zu Satz 4.5); mit dem sich gemäß Teil 2) eine Lösung u^* des DČAP konstruieren läßt. Sei nun u^{**} eine weitere, von u^* verschiedene Lösung, d. h.

$$(33) \quad \max_{0 \leq j \leq n+1} |f_j - \phi_j(u^{**})| = \max_{0 \leq j \leq n+1} |f_j - \phi_j(u^*)| \\ = |\eta(f_0, f_1, \dots, f_{n+1})|$$

Aufgrund von (29) gilt

$$(34) \quad f_j - \phi_j(u^*) = s_j \eta(f_0, f_1, \dots, f_{n+1}),$$

$0 \leq j \leq n+1$, und daher ist mit $\varepsilon = \pm 1$

$$\varepsilon s_j (f_j - \phi_j(u^*)) \geq 0,$$

$0 \leq j \leq n+1$; hieraus folgt wegen (33) und (34)

$$\varepsilon s_j ((f_j - \phi_j(u^*)) - (f_j - \phi_j(u^{**}))) \geq 0,$$

$0 \leq j \leq n+1$, und somit

$$\varepsilon s_j \phi_j(u^{**} - u^*) \geq 0, \quad 0 \leq j \leq n+1.$$

Da $u^{**} - u^* \in U$ ist, folgt mit Hilfssatz 4.7

$u^{**} - u^* = 0 \in U$ und hiermit $u^{**} = u^*$, im Widerspruch zur Annahme. Also gibt es neben u^* keine weitere Lösung des DCAP. _

speziell gilt der folgende

Satz 4.8:

Es sei Q ein kompakter Hausdorff-Raum und $C(Q)$ der Vektorraum aller auf Q stetigen reellwertigen Funktionen, der mit der Čebyšev-Norm

$$\|f\|_Q = \max_{x \in Q} |f(x)|$$

versehen, zu einem Banachraum über $\mathbb{R}$ wird. Mit dem $(n + 1)$ -dimensionalen Teilraum U von $C(Q)$ und den $n + 2$ paarweise verschiedenen Punkten

$x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in Q$ sei

$$(U; \epsilon_{x_0}, \epsilon_{x_1}, \dots, \epsilon_{x_{n+1}}; s_0, s_1, \dots, s_{n+1})$$

ein DČAS, wobei die Punktfunktionale ϵ_{x_j} wie in § 1 definiert sind. Dann gilt:

- 1) Es gibt mindestens einen Index j_0 , so daß die Punktfunktionale

$$\epsilon_{x_0}, \epsilon_{x_1}, \dots, \epsilon_{x_{j_0-1}}, \epsilon_{x_{j_0+1}}, \dots, \epsilon_{x_{n+1}}$$

linear unabhängig sind auf U . Die zugehörige Dualbasis in U sei

$$l_0, l_1, \dots, l_{j_0-1}, l_{j_0+1}, \dots, l_{n+1}.$$

- 2) Mit einer beliebigen Basis $u_0, u_1, \dots, u_n$ von U und

$$\eta(g) = \frac{\begin{vmatrix} g(x_0) & u_0(x_0) & \dots & u_n(x_0) \\ g(x_1) & u_0(x_1) & \dots & u_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(x_{n+1}) & u_0(x_{n+1}) & \dots & u_n(x_{n+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0 & u_0(x_0) & \dots & u_n(x_0) \\ s_1 & u_0(x_1) & \dots & u_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n+1} & u_0(x_{n+1}) & \dots & u_n(x_{n+1}) \end{vmatrix}} \in \mathbb{R},$$

$g \in C(Q)$, ist

$$u^* = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j_0}}^{n+1} (f(x_j) - s_j \eta(f)) l_j$$

ein Element aus U , das f auf jeder kompakten Teilmenge K , für die

$$(i) \quad \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\} \subseteq K \subseteq Q$$

und

$$(ii) \quad |\eta(f)| = \max_{x \in K} |f(x) - u^*(x)|$$

gilt, am besten approximiert.

- 3) Ist für jeden Index $j \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ das Tupel $(U; \in_{x_0}, \dots, \in_{x_{j-1}}, \in_{x_{j+1}}, \dots, \in_{x_{n+1}})$ ein IS, so ist das gemäß 2) bestimmte u^* die einzige Minimallösung für f auf K (bezüglich U).

Beweis:

Mit Hilfe des stetigen linearen Funktionals

$$F_K : C(K) \ni g \longmapsto \eta(g) \in \mathbb{R}$$

folgt die Aussage sofort aus Satz 4.2 und dem Beweis zu Satz 4.6.

Wir nennen ein DČAP $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1})$ mit der Eigenschaft, daß für jeden Index j das Tupel $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{j-1}, \phi_{j+1}, \dots, \phi_{n+1})$ ein IS bildet oder, was gleichbedeutend hiermit ist, die gemäß (25) definierte Unterdeterminante D_j nicht verschwindet, ein eindeutig lösbares Čebyšev-

Approximationsproblem (EDČAP). Entsprechend nennen wir ein DČAS, dessen zugehöriges DČAP ein EDČAP ist, ein eindeutig lösbares diskretes Čebyšev-Approximationssystem (EDČAS).

Für eindeutig lösbare diskrete Čebyšev-Approximationssysteme gilt ein Satz vom de la Vallée-Poussin-Typ:

Satz 4.9:

Es seien $(U; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n+1}; s_0, s_1, \dots, s_{n+1})$ ein EDČAS und $f_0, f_1, \dots, f_{n+1}$ beliebig aus $\mathbb{R}$.

Gibt es dann zu einem $u' \in U$ $n+2$ positive reelle Zahlen r_j mit der Eigenschaft

$$(35) \quad \epsilon s_j (f_j - \phi_j(u')) = r_j, \quad 0 \leq j \leq n+1, \quad \epsilon = \pm 1,$$

so gilt die folgende Abschätzung

$$\min_{0 \leq j \leq n+1} r_j \leq \min_{u \in U} \max_{0 \leq j \leq n+1} |f_j - \phi_j(u)| \leq \max_{0 \leq j \leq n+1} r_j$$

Beweis:

Die rechte Seite der Abschätzung ist offensichtlich.

Um die linke zu beweisen, führen wir die Annahme

$$(36) \quad \min_{0 \leq j \leq n+1} r_j \geq \min_{u \in U} \max_{0 \leq j \leq n+1} |f_j - \phi_j(u)|$$

$$=: \max_{0 \leq j \leq n+1} |f_j - \phi_j(u'')|$$

zum Widerspruch.

Aus (35) und (36) folgt

$$\varepsilon s_j ((f_j - \phi_j(u')) - (f_j - \phi_j(u''))) \geq 0,$$

$0 \leq j \leq n+1$, und somit

$$\varepsilon s_j \phi_j(u'' - u') \geq 0, \quad 0 \leq j \leq n+1.$$

Da $u'' - u' \in U$ ist, folgt gemäß Hilfssatz 4.7, daß $u'' = u'$ gilt, im Widerspruch zu (36). _

Speziell gilt der

Satz 4.10:

Neben den Voraussetzungen von Satz 4.8 gelte, daß

$(U; \in_{x_0}, \in_{x_1}, \dots, \in_{x_{n+1}}; s_0, s_1, \dots, s_{n+1})$ ein EDCAS ist. Gibt es dann für ein beliebiges $f \in C(Q)$ und $u' \in U$ $n+2$ positive Zahlen r_j mit der Eigenschaft

$$\varepsilon s_j (f(x_j) - u'(x_j)) = r_j, \quad 0 \leq j \leq n+1, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

so folgt die Abschätzung

$$\min_{0 \leq j \leq n+1} r_j \leq \min_{u \in U} \|f - u\|_Q \leq \|f - u'\|_Q$$

Beweis:

Der Beweis verläuft analog zu dem von Satz 4.9, indem man wieder die Annahme

$$\min_{u \in U} \|f - u\|_Q = \|f - u''\|_Q < \min_{0 \leq j \leq n+1} |f(x_j) - u'(x_j)|$$

(unter Benutzung der Beziehung

$$\max_{0 \leq j \leq n+1} |f(x_j) - u''(x_j)| \leq \|f - u''\|_Q)$$

zum Widerspruch führt. _

Beispiel 4.11:

Es bezeichne $\mathcal{T}_n$ den linearen Raum der trigonometrischen Polynome

$$T(x) = a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cdot \cos jx + b_j \cdot \sin jx)$$

vom Grade $\leq n$ ($n \in \mathbb{N}_0$), d. h. den von den Funktionen

$$\cos_j : \mathbb{R} \ni x \mapsto \cos jx, j = 0, \dots, n,$$

$$\sin_j : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sin jx, j = 1, \dots, n,$$

aufgespannten, $(2n + 1)$ -dimensionalen linearen Raum über $\mathbb{R}$. Definiert man auf $\mathcal{T}_n$ die $2n + 2$ linearen Funktionale

$$\phi_0 : \mathcal{T}_n \ni T \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) dx$$

$$\phi_{2j} : \mathcal{T}_n \ni T \mapsto \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos jx dx, j = 1, \dots, n,$$

$$\phi_{2j-1} : \mathcal{T}_n \ni T \mapsto \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \sin jx dx, j = 1, \dots, n,$$

und

$$\phi_{2n+1} : \mathcal{T}_n \ni T \mapsto T(0),$$

so ist

$$(37) \quad (\mathcal{T}_n; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{2n+1}; 1, -1, \dots, (-1)^{2n+1})$$

ein DČAS, nicht aber ein EDCAS. Die gemäß (23) definierte Determinante D lautet in diesem Falle:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Für die gemäß (25) definierten Unterdeterminanten

D_j ($0 \leq j \leq 2n + 1$) erhält man

$$(38) \quad \begin{aligned} D_0 &= D_2 = \dots = D_{2n} = D_{2n+1} = 1 \\ D_1 &= D_3 = \dots = D_{2n-1} = 0 \end{aligned}$$

Daher gilt für D:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j=0}^{2n+1} (-1)^j (-1)^j D_j = \sum_{j=0}^{2n+1} D_j = \sum_{j=0}^n D_{2j} + D_{2n+1} \\ &= n + 2 \end{aligned}$$

und

$$|D| = \left| \sum_{j=0}^{2n+1} D_j \right| = \sum_{j=0}^{2n+1} |D_j| = n + 2 \neq 0$$

Gemäß Definition 4.4 ist (37) ein $\check{D}\check{C}AS$, nicht aber ein $ED\check{C}AS$, wie aus (38) ersichtlich.

Da insbesondere $D_{2n+1} \neq 0$ ist, bildet

$$(\mathcal{T}_n; \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{2n})$$

ein IS. Die entsprechende Dualbasis in $\mathcal{T}_n$ bilden offensichtlich die Funktionen

$$\begin{aligned} l_{2j} &= \cos_j, \quad j = 0, \dots, n \\ l_{2j-1} &= \sin_j, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Sind nun $2n + 2$ beliebige reelle Zahlen $f_0, f_1, \dots, f_{2n+1}$ vorgegeben, so gilt für das gemäß (28) definierte stetige lineare Funktional η :

$$\begin{aligned} \eta(f_0, f_1, \dots, f_{2n+1}) \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{2n+1} (-1)^j f_j D_j}{n+2} = \frac{\sum_{j=0}^n f_{2j} D_{2j} - f_{2n+1} D_{2n+1}}{n+2} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^n f_{2j} - f_{2n+1}}{n+2} \end{aligned}$$

Daher erfüllt das trigonometrische Polynom T^* vom Grade $\leq n$ mit

$$\begin{aligned} T^* &= \sum_{i=0}^{2n} (f_i - (-1)^i \frac{\sum_{j=0}^n f_{2j} - f_{2n+1}}{n+2}) l_i \\ &= (f_0 - \frac{\sum_{j=0}^n f_{2j} - f_{2n+1}}{n+2}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \{ (f_{2i} - \frac{\sum_{j=0}^n f_{2j} - f_{2n+1}}{n+2}) \cos_i \\ &\quad + (f_{2i-1} + \frac{\sum_{j=0}^n f_{2j} - f_{2n+1}}{n+2}) \sin_i \} \end{aligned}$$

die Beziehung

$$\max_{0 \leq j \leq 2n+1} |\phi_j(T^*) - f_j| \leq \max_{0 \leq j \leq 2n+1} |\phi_j(T) - f_j|$$

für alle $T \in \mathcal{T}_n$. Im allgemeinen ist T^* aber nicht die einzige Lösung der diskreten Čebyšev-Approximationsaufgabe; denn wie man leicht sieht, ist auch

$$T^{**} = (f_0 - \frac{\sum_{j=0}^n f_{2j} - f_{2n+1}}{n+2}) + \sum_{i=1}^n \{ (f_{2i} - \frac{\sum_{j=0}^n f_{2j} - f_{2n+1}}{n+2}) \cos_i + f_{2i-1} \sin_i \}$$

eine Lösung, und T^{**} ist für $\sum_{j=0}^n f_{2j} \neq f_{2n+1}$ von T^* verschieden.

Beispiel 4.12

Gegeben seien das reelle Intervall $[a, b]$ ($b > a$),
 $n + 2$ Punkte

$$(39) \quad a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$$

sowie $n + 1$ Funktionen $u_0, u_1, \dots, u_n \in C[a, b]$,
 die auf $[a, b]$ ein Haar-System vom Grad n bilden.

Setzt man $U = \text{span}\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ und erklärt man die Punktfunktionale $\in_{x_j}$ wie in § 1, so ist das Tupel

(40) $(U; \in_{x_0}, \in_{x_1}, \dots, \in_{x_{n+1}}; 1, -1, \dots, (-1)^{n+1})$
ein EDČAS.

Mit

$$D = \begin{vmatrix} 1 & u_0(x_0) & u_1(x_0) & \dots & u_n(x_0) \\ -1 & u_0(x_1) & u_1(x_1) & \dots & u_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1} & u_0(x_{n+1}) & u_1(x_{n+1}) & \dots & u_n(x_{n+1}) \end{vmatrix}$$

gilt nämlich wegen (39) (vgl. L. VEIDINGER [26]) das folgende

Lemma 4.13:

Die Unterdeterminanten D_j mit

$$D_j = \begin{vmatrix} u_0(x_0) & u_1(x_0) & \dots & u_n(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0(x_{j-1}) & u_1(x_{j-1}) & \dots & u_n(x_{j-1}) \\ u_0(x_{j+1}) & u_1(x_{j+1}) & \dots & u_n(x_{j+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0(x_{n+1}) & u_1(x_{n+1}) & \dots & u_n(x_{n+1}) \end{vmatrix},$$

$0 \leq j \leq n+1$, sind alle von Null verschieden und besitzen alle dasselbe Vorzeichen.

Daher gilt

$$|D| = \left| \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (-1)^j D_j \right| = \left| \sum_{j=0}^{n+1} D_j \right| = \sum_{j=0}^{n+1} |D_j| \neq 0,$$

und somit ist (40) ein EDČAS.

Da insbesondere $D_{n+1} \neq 0$ gilt, ist

$$(U; \in_{x_0}, \in_{x_1}, \dots, \in_{x_n})$$

ein IS. Die zugehörige Dualbasis sei $l_0, l_1, \dots, l_n$.

Für ein beliebiges $f \in C[a, b]$ ist dann

$$u^* = \sum_{j=0}^n (f(x_j) - (-1)^j \eta(f)) l_j$$

mit

$$\eta(f) = \frac{\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j f(x_j) D_j}{\sum_{j=0}^{n+1} D_j}$$

gemäß Satz 4.8 die eindeutig bestimmte beste Approximation an f auf $\{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$ bezüglich U , d. h. u^* ist das einzige Element aus U , für das gilt:

$$\max_{0 \leq j \leq n+1} |u^*(x_j) - f(x_j)| = \min_{u \in U} \max_{0 \leq j \leq n+1} |u(x_j) - f(x_j)|$$

Bemerkung 4.14:

Wendet man Satz 4.10 auf dieses Beispiel an, so erhält man den bekannten Satz von de la Vallée-Poussin.

Bemerkung 4.15:

Das obige Beispiel zeigt in Verbindung mit Satz 4.8, daß man ohne Rückgriff auf den Alternantensatz (vgl. N. I. ACHIESER [1]) beweisen kann, daß der Remez-Algorithmus (vgl. G. MEINARDUS [13], H. WERNER und R. SCHABACK [28]) bei der Čebyšev-Approximation bezüglich eines Haar-Systems endlichen Grades auf $[a, b]$ für jedes $f \in C[a, b]$ gegen das (verallgemeinerte) Polynom bester Approximation konvergiert.

Bemerkung 4.16:

Hilfssatz 4.7 liefert mit (40) und Lemma 4.13 das bekannte Ergebnis von T. S. MOTZKIN und J. L. WALSH [15]:

Es sei $U = \text{span}\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ der von dem Haar-

System $u_0, u_1, \dots, u_n$ vom Grad n auf $[a, b]$ aufgespannte Teilraum von $C[a, b]$. Gilt dann für ein $u \in U$ und $n + 2$ Punkte

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$$

die Beziehung

$$\epsilon(-1)^j u(x_j) \geq 0, \quad 0 \leq j \leq n+1, \quad \epsilon = \pm 1,$$

so ist u identisch Null.

§ 5 Diskrete Čebyšev-Approximation in zwei Veränderlichen

Wir hatten in Kapitel 1 "verminderte" Punktgitter

$W^{(M_0, M_1, \dots, M_n)}$ betrachtet und festgestellt, daß auf solchen Gittern Interpolation mit Polynomen aus $\Pi_{mn}^{(M_0, M_1, \dots, M_n)}$ stets eindeutig möglich ist.

Nimmt man nun einen beliebigen Punkt $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ hinzu, so gibt es im allgemeinen zu beliebigen reellen Zahlen f_{ji} ($0 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq m - M_j$) und

f^* kein Polynom $P \in \Pi_{mn}^{(M_0, M_1, \dots, M_n)}$ mit

$$P(x_{ji}, y_j) = f_{ji}, \quad 0 \leq j \leq n, \quad 0 \leq i \leq m - M_j,$$

$$P(x^*, y^*) = f^*.$$

Da wir von dem "verminderten" Punktgitter

$W^{(M_0, M_1, \dots, M_n)}$ ausgehen und den Polynomraum

$\Pi_{mn}^{(M_0, M_1, \dots, M_n)}$ betrachten, gibt es aufgrund von

Satz 2.1 und Satz 4.5 Zahlen s_{ji} ($0 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq m - M_j$) und s^* aus $\{-1, 1\}$, so daß

$$(\pi_{mn}^{(M_0, \dots, M_n)}; \in_{(x_{ji}, y_j)} (0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m - M_j), \in_{(x^*, y^*)}; \\ s_{ji} (0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m - M_j), s^*)$$

ein DCAS ist, mit dessen Hilfe man gemäß Satz 4.6

ein Polynom $P^* \in \pi_{mn}^{(M_0, M_1, \dots, M_n)}$ mit

$$\max \{ \max_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 0 \leq i \leq m - M_j}} |f_{ji} - P^*(x_{ji}, y_j)|, |f^* - P^*(x^*, y^*)| \}$$

$$= \min_{\substack{(M_0, \dots, M_n) \\ P \in \pi_{mn}}} \max \{ \max_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 0 \leq i \leq m - M_j}} |f_{ji} - P(x_{ji}, y_j)|, \\ |f^* - P(x^*, y^*)| \}$$

konstruieren und die Frage nach der Eindeutigkeit entscheiden kann. Bei der Konstruktion wollen wir hier zunächst etwas anders vorgehen. Wir unterscheiden hierzu zwei Fälle:

Fall I

(x^*, y^*) liegt auf einer der Geraden

$$G_j = \{(x, y_j) : a \leq x \leq b\}, 0 \leq j \leq n,$$

etwa auf G_r .

Fall II

(x^*, y^*) liegt auf keiner der Geraden G_j , d. h.
 $y^* \neq y_j$ für $j = 0, 1, \dots, n$.

Wir behandeln zunächst den

Fall I

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir

$$(x^*, y^*) = (x_{r(m-M_r+1)}, y_r)$$

$$f^* = f_{r(m-M_r+1)}$$

$$N_j = \begin{cases} M_j & \text{für } j \neq r \\ M_r - 1 & \text{für } j = r \end{cases}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Außerdem definieren wir

$$q = \min_{0 \leq k \leq r} \{k : M_k = M_r\}.$$

Gemäß § 2 gilt dann:

Die Punktfunktionale $\in (x_{ji}, y_j)$, $0 \leq j \leq n$,

$0 \leq i \leq m - N_j$, sind linear unabhängig auf dem
 Polynomraum

$$(41) \left\{ \begin{array}{ll} \prod_{(m+1)n}^{(M_0, M_1+1, \dots, M_n+1)} & \text{für } q = M_0 = 0 \\ \prod_{mn}^{(M_0, \dots, M_{q-1}, M_q-1, M_{q+1}, \dots, M_n)} & \text{sonst} \end{array} \right.$$

Daher ist die mit den Matrizen

$$\dot{X}_j^k = \begin{bmatrix} 1 & x_{j0} & \dots & x_{j0}^k \\ 1 & x_{j1} & \dots & x_{j1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{j(m-N_j)} & \dots & x_{j(m-N_j)}^k \end{bmatrix}$$

gebildete Determinante

$$G = \begin{vmatrix} \dot{X}_0^{m-M_0} & \dots & y_0 \dot{X}_0^{q, m-M_q+1} & \dots & y_0 \dot{X}_0^{n, m-M_n} \\ \dot{X}_1^{m-M_0} & \dots & y_1 \dot{X}_1^{q, m-M_q+1} & \dots & y_1 \dot{X}_1^{n, m-M_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{X}_n^{m-M_0} & \dots & y_n \dot{X}_n^{q, m-M_q+1} & \dots & y_n \dot{X}_n^{n, m-M_n} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden.

Definiert man die Unterdeterminanten D_{ji} ,

$0 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq m - N_j$, als diejenigen, die aus

G durch Streichen der Spalte, in der die Potenzen $x_{ts}^{m-M_q+1} y_t^q$ ($0 \leq t \leq n$, $0 \leq s \leq m - N_t$) stehen, und der Zeile mit den Potenzen $x_{ji}^s y_j^t$, $0 \leq t \leq n$, $0 \leq s \leq m - M_t(t + q)$, $0 \leq s \leq m - M_q + 1$ ($t = q$) hervorgehen, so gilt aufgrund unserer Voraussetzungen zumindest

$$(42) \quad D_{r(m-N_r)} \neq 0.$$

Setzt man nun ($0 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq m - N_j$)

$$s_{ji} = \begin{cases} \text{sign}[D_{ji}] e_{ji} & \text{für } D_{ji} \neq 0 \\ 1 & \text{für } D_{ji} = 0 \end{cases}$$

mit $e_{ji} = (-1)^{i + \sum_{k=0}^{j-1} (m-N_k+1)}$, so gibt es, da wir

eindeutig interpolieren können, genau zwei Polynome R und Q aus dem Polynomraum (41) mit den Eigenschaften

$$\left. \begin{aligned} R(x_{ji}, y_j) &= s_{ji} \\ Q(x_{ji}, y_j) &= f_{ji} \end{aligned} \right\} , \quad 0 \leq j \leq n, \quad 0 \leq i \leq m - N_j.$$

Es sei

$$R(x, y) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq q}}^n \sum_{l=0}^{m-M_k} A_{lk} x^l y^k + \sum_{l=0}^{m-M_q+1} A_{lq} x^l y^q$$

$$Q(x, y) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq q}}^n \sum_{l=0}^{m-M_k} B_{lk} x^l y^k + \sum_{l=0}^{m-M_q+1} B_{lq} x^l y^q$$

Dann lassen sich die Koeffizienten $A_{(m-M_q+1)q}$ und $B_{(m-M_q+1)q}$ mit Hilfe der Darstellungsformeln für die Dualbasiselemente explizit angeben. Gemäß (16) gilt nämlich mit

$$c_{ji} = - \sum_{s=0}^{m-N_r} \frac{\sum_{t=j}^{q-1} G_{ji}^{(t)}(x_{rs}, y_r)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq s}}^{m-N_r} (x_{rs} - x_{rk}) \prod_{l=0}^{q-1} (y_r - y_l)}$$

$$0 \leq j \leq q-1, 0 \leq i \leq m-N_j,$$

$$c_{ri} = \frac{1}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m-N_r} (x_{ri} - x_{rk}) \prod_{l=0}^{q-1} (y_r - y_l)}$$

$$A_{(m-M_q+1)q} = \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{m-N_j} s_{ji} c_{ji} + \sum_{i=0}^{m-N_r} s_{ri} c_{ri}$$

$$B_{(m-M_q+1)q} = \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{m-N_j} f_{ji} c_{ji} + \sum_{i=0}^{m-N_r} f_{ri} c_{ri}$$

Andererseits erhält man für $A_{(m-M_q+1)q}$ mittels der Cramer'schen Regel:

$$\begin{aligned} (43) \quad A_{(m-M_q+1)q} &= \frac{1}{G} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-N_j} (-1)^c e_{ji} s_{ji} D_{ji} \\ &= \frac{(-1)^c}{G} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-N_j} |D_{ji}| \neq 0, \end{aligned}$$

wobei das Ungleichheitszeichen direkt aus (42) folgt.

Somit ist der Quotient

$$\frac{B_{(m-M_q+1)q}}{A_{(m-M_q+1)q}} = \lambda$$

wohldefiniert, und für das Polynom $P = Q - \lambda R$ gilt

offensichtlich $P \in \Pi_{mn}^{(M_0, M_1, \dots, M_n)}$ und

$$(44) \quad P(x_{ji}, y_j) = f_{ji} - \lambda s_{ji},$$

$$0 \leq j \leq n, \quad 0 \leq i \leq m - N_j.$$

Nun ist

$$(\pi_{mn}^{(M_0, \dots, M_n)}; \in_{(x_{ji}, y_j)} (0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m - N_j); \\ s_{ji} (0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m - N_j))$$

wegen (43) offensichtlich ein DCAS. Anwendung der Cramer'schen Regel auf $B_{(m-M_q+1)q}$ liefert mit (28)

$$\lambda = \eta(f_{00}, \dots, f_{0(m-N_0)}, \dots, f_{n0}, \dots, f_{n(m-N_n)}).$$

Daher folgt aus (44) und der Tatsache, daß

$$(\pi_{mn}^{(M_0, \dots, M_n)}; \in_{(x_{ji}, y_j)} : 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m - M_j)$$

ein IS ist: $P = P^*$.

Besonders angenehm gestaltet sich die Konstruktion der Minimallösung, wenn das "erweiterte" Punktgitter die nachstehend definierte Eigenschaft Z besitzt:

Definition 5.1:

Das "erweiterte" Punktgitter $\{(x_{ji}, y_j) : 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m - N_j\}$ besitzt die Eigenschaft Z, wenn gilt:

$$(45) \quad m - N_r \geq m - M_0.$$

Für den Rest der Betrachtungen zum Fall I setzen wir o.B.d.A. voraus:

$$(i) \quad M_0 = 0$$

$$(ii) \quad a \leq x_{j0} < x_{j1} < \dots < x_{j(m-N_j)} \leq b, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Über die Anordnung der y_j können wir, wollen wir die Allgemeingültigkeit nicht beschränken, nichts voraussetzen. Daher treffen wir die folgende

Definition 5.2:

$$K_j = \begin{cases} \frac{r + \sum_{t=0}^r \text{sign}[y_j - y_t]}{2} & \text{für } 0 \leq j \leq r \\ j & \text{für } r+1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Für jedes j mit $0 \leq j \leq r$ ist K_j somit die Anzahl der Zahlen y_t ($0 \leq t \leq r$), die kleiner sind als y_j . Hiermit gilt der folgende

Satz 5.3:

$$(\pi_{mn}^{(M_0, \dots, M_n)}; \in (x_{ji}, y_j) : 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m - N_j;$$

$$(-1)^{K_j+i} : 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m - N_j)$$

ist ein $\check{D}\check{C}AS$.

Beweis:

Wir definieren die Determinante D gemäß (23), wobei die Funktionale $\in (x_{ji}, y_j)$ wie oben in G angeordnet werden, und die Unterdeterminanten D_{ji} ($0 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq m - N_j$) wie oben. Dann unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle:

Fall I.1 $m - N_r \geq m - M_0$

Fall I.2 $m - N_r = m - M_0$

Zu Fall I.1

Aus $m - N_r = m - M_r + 1 \geq m - M_0 = m$ folgt zunächst $M_r = 0$ und damit $m - N_r = m + 1$ und

$$M_0 = M_1 = \dots = M_r = 0$$

$$i + \sum_{k=0}^{j-1} (m - N_k + 1)$$

Dann ist mit $e_{ji} = (-1)$

$$(46) \quad D = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-N_j} e_{ji} (-1)^{K_j+i} D_{ji}$$

$$= \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^{i+r(m+1)} (-1)^{K_r+i} D_{ri}$$

$$+ \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq r}}^n \sum_{i=0}^{m-N_j} e_{ji} (-1)^{K_j+i} D_{ji}$$

Für $0 \leq j \leq n$, $j \neq r$, $0 \leq i \leq m - N_j$ gilt mit $e = \pm 1$

$$(47) \quad D_{ji} = e \begin{vmatrix} 1 & \dots & x_{ro}^m & \dots & y_r^n & \dots & x_{ro}^{m-M_n} y_r^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & x_{rm}^m & \dots & y_r^n & \dots & x_{rm}^{m-M_n} y_r^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & x_{r(m+1)}^m & \dots & y_r^n & \dots & x_{r(m+1)}^{m-M_n} y_r^n \\ * & \dots & * & \dots & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * & \dots & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

$$= e \begin{vmatrix} 1 & x_{ro} & \dots & x_{ro}^m & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{rm} & \dots & x_{rm}^m & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{r(m+1)} & \dots & x_{r(m+1)}^m & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

Aus (46) folgt daher:

$$D = \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^{r(m+1)+K_r} D_{ri} = (-1)^{r(m+1)+K_r} \sum_{i=0}^{m+1} D_{ri}$$

Setzt man $(0 \leq i \leq m - N_j)$

$$(48) \quad \dot{X}_{j,i}^p = \begin{bmatrix} 1 & x_{j0} & \dots & x_{j0}^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{j(i-1)} & \dots & x_{j(i-1)}^p \\ 1 & x_{j(i+1)} & \dots & x_{j(i+1)}^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{j(m-N_j)} & \dots & x_{j(m-N_j)}^p \end{bmatrix}$$

so gilt mit $e = (-1)^{(m+1)r(m+1)}$ für $0 \leq i \leq m+1$:

$$(49) \quad D_{ri} = e \begin{vmatrix} \overset{m}{\dot{X}_{r,i}} & y_r \overset{m-M_1}{\dot{X}_{r,i}} & \dots & y_r \overset{n \ m-M_n}{\dot{X}_{r,i}} \\ \overset{m}{X_o} & y_o \overset{m-M_1}{X_o} & \dots & y_o \overset{n \ m-M_n}{X_o} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overset{m}{X_{r-1}} & y_{r-1} \overset{m-M_1}{X_{r-1}} & \dots & y_{r-1} \overset{n \ m-M_n}{X_{r-1}} \\ \overset{m}{X_{r+1}} & y_{r+1} \overset{m-M_1}{X_{r+1}} & \dots & y_{r+1} \overset{n \ m-M_n}{X_{r+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overset{m}{X_n} & y_n \overset{m-M_1}{X_n} & \dots & y_n \overset{n \ m-M_n}{X_n} \end{vmatrix}$$

$$= e \det(\dot{x}_{r,i}^m) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq r}}^n (y_j - y_r)^{m-N_j+1}$$

$X_0^{m-M_1}$	...	Y_0^{n-1}	$X_0^{m-M_n}$
.....			
$X_{r-1}^{m-M_1}$	...	Y_{r-1}^{n-1}	$X_{r-1}^{m-M_n}$
.....			
$X_{r+1}^{m-M_1}$	...	Y_{r+1}^{n-1}	$X_{r+1}^{m-M_n}$
.....			
$X_n^{m-M_1}$	...	Y_n^{n-1}	$X_n^{m-M_n}$

$$= e \prod_{\substack{0 \leq l \leq k \leq m+1 \\ l \neq i \neq k}} (x_{rk} - x_{rl}) \prod_{\substack{0 \leq g \leq h \leq n \\ g \neq r \neq h}} (y_h - y_g)^{m-N_h+1} \times$$

$$\times \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq r}}^n \left(\prod_{\substack{0 \leq s \leq t \leq m-N_j \\ s \neq r \neq t}} (x_{jt} - x_{js}) (y_j - y_r)^{m-N_j+1} \right)$$

Hierin ist nur der Faktor

$$\prod_{\substack{0 \leq l \leq k \leq m+1 \\ l \neq i \neq k}} (x_{rk} - x_{rl})$$

von i abhängig. Wegen $x_{r0} \leq x_{r1} \leq \dots \leq x_{r(m+1)}$ ist er für alle $0 \leq i \leq m+1$ positiv. Somit sind entweder alle D_{ri} positiv oder alle negativ. Hieraus ergibt sich

$$|D| = \sum_{i=0}^{m+1} |D_{ri}| \neq 0,$$

und damit die Behauptung.

Zu Fall I.2

Zunächst folgt aus $m - N_r = m - M_r + 1 = m$ die Beziehung $M_r = 1$.

Daher können wir o.B.d.A.

$$M_0 = M_1 = \dots = M_{r-1} = 0$$

voraussetzen.

Definiert man die Matrizen $\dot{X}_{j,i}^k$ gemäß (48), so gilt für $0 \leq j \leq r$, $0 \leq i \leq m$

$$D_{ji} = \begin{vmatrix} \dot{X}_0^m & y_0 \dot{X}_0^{m-M_1} & \dots & y_0 \dot{X}_0^{n, m-M_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{X}_{j-1}^m & y_{j-1} \dot{X}_{j-1}^{m-M_1} & \dots & y_{j-1} \dot{X}_{j-1}^{n, m-M_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{X}_{j,i}^m & y_j \dot{X}_{j,i}^{m-M_1} & \dots & y_j \dot{X}_{j,i}^{n, m-M_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{X}_{j+1}^m & y_{j+1} \dot{X}_{j+1}^{m-M_1} & \dots & y_{j+1} \dot{X}_{j+1}^{n, m-M_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{X}_n^m & y_n \dot{X}_n^{m-M_1} & \dots & y_n \dot{X}_n^{n, m-M_n} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{m(r-j)(m+1)} \left| \begin{array}{cccc}
 \dot{X}_0^m & y_0 \dot{X}_0^{m-M_1} & \dots & y_0 \dot{X}_0^{n, m-M_n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dot{X}_{j-1}^m & y_{j-1} \dot{X}_{j-1}^{m-M_1} & \dots & y_{j-1} \dot{X}_{j-1}^{n, m-M_n} \\
 \dot{X}_{j+1}^m & y_{j+1} \dot{X}_{j+1}^{m-M_1} & \dots & y_{j+1} \dot{X}_{j+1}^{n, m-M_n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dot{X}_r^m & y_r \dot{X}_r^{m-M_1} & \dots & y_r \dot{X}_r^{n, m-M_n} \\
 \dot{X}_{j,i}^m & y_j \dot{X}_{j,i}^{m-M_1} & \dots & y_j \dot{X}_{j,i}^{n, m-M_n} \\
 \dot{X}_{r+1}^m & y_{r+1} \dot{X}_{r+1}^{m-M_1} & \dots & y_{r+1} \dot{X}_{r+1}^{n, m-M_n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dot{X}_n^m & y_n \dot{X}_n^{m-M_1} & \dots & y_n \dot{X}_n^{n, m-M_n}
 \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{m(r-j)(m+1)} \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^n \left(\prod_{\substack{0 \leq l \leq k \leq m-N_s \\ l \neq j}} (x_{sk} - x_{sl}) \right) \times \\
 &\quad \times \prod_{\substack{0 \leq l \leq k \leq m \\ l \neq i \neq k}} (x_{jk} - x_{jl}) \cdot A
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 A &= \prod_{\substack{0 \leq s \leq t \leq n \\ s \neq j \neq t}} (y_t - y_s)^{m-N_t+1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^r (y_j - y_k)^m \prod_{l=r+1}^n (y_l - y_j)^{m-N_l+1} \\
 &= \prod_{\substack{0 \leq s \leq t \leq n \\ s \neq j \neq t}} (y_t - y_s)^{m-N_t+1} \prod_{k_1=0}^{j-1} (y_j - y_{k_1})^{m+1} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \prod_{k_2=j+1}^r (y_{k_2} - y_j)^{m+1} \prod_{l=r+1}^n (y_l - y_j)^{m-N_l+1} \frac{(-1)^{(r-j)(m+1)}}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^r (y_j - y_k)} \\
 & = \prod_{0 \leq s \leq t \leq n} (y_t - y_s)^{m-N_t+1} \frac{(-1)^{(r-j)(m+1)}}{(-1)^{r-K_j} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^r |y_j - y_k|}
 \end{aligned}$$

Also gilt für $0 \leq j \leq r$, $0 \leq i \leq m$

$$(50) \quad D_{ji} = (-1)^{(m+1)(r-j)-r+K_j} \prod_{0 \leq s \leq t \leq n} (y_t - y_s)^{m-N_t+1} \times$$

$$\times \frac{\prod_{s=0}^n \left(\prod_{0 \leq l \leq k \leq m-N_s} (x_{sk} - x_{sl}) \right) \prod_{\substack{0 \leq l \leq k \leq m \\ l \neq i \neq k}} (x_{jk} - x_{jl})}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^r |y_j - y_k|}$$

$\neq 0$.

Hierbei ist der Quotient wegen

$$x_{t_0} < x_{t_1} < \dots < x_{t(m-N_t)}, \quad 0 \leq t \leq n,$$

für alle $0 \leq j \leq r$, $0 \leq i \leq m$ positiv.

Während also alle diese D_{ji} von Null verschieden sind, gilt

$$(51) \quad D_{ji} = 0, \quad r+1 \leq j \leq n, \quad 0 \leq i \leq m - N_j.$$

Es ist dann nämlich

$$D_{ji} = \prod_{s=0}^{r-1} \left(\prod_{0 \leq l < k \leq m} (x_{sk} - x_{sl}) \right) \prod_{t=s+1}^n (y_t - y_s)^{m-N_t+1} \times$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & x_{r0}^{m-1} & \dots & y_r^{n-r} & \dots & x_{r0}^{m-M_n} y_r^{n-r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & x_{r(m-1)}^{m-1} & \dots & y_r^{n-r} & \dots & x_{r(m-1)}^{m-M_n} y_r^{n-r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & x_{rm}^{m-1} & \dots & y_r^{n-r} & \dots & x_{rm}^{m-M_n} y_r^{n-r} \\ * & \dots & * & \dots & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & * & \dots & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

= 0.

Daher gilt für D:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-N_j} e_{ji} (-1)^{K_j+i} D_{ji} \\ &= \sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^m (-1)^{i+j(m+1)} (-1)^{K_j+i} D_{ji} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \prod_{0 \leq s < t \leq n} (y_t - y_s)^{m-N_t+1} (-1)^{mr} \times \\
 &\times \frac{\prod_{s=0}^n \left(\prod_{0 \leq l < k \leq m-N_s} (x_{sk} - x_{sl}) \right) \prod_{0 \leq l < k \leq m} (x_{jk} - x_{jl})}{\prod_{\substack{j=0 \\ k \neq j}}^r |y_j - y_k|}
 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$|D| = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-N_j} |D_{ji}| \neq 0$$

und damit die Behauptung. _

Gemäß (28) bestimmen wir nun

$$\eta(f_{00}, \dots, f_{0m}, \dots, f_{n0}, \dots, f_{n(m-N_n)}) =: \eta_{f_{ts}}$$

wobei wir wieder die Fälle I.1 und I.2 unterscheiden.

Fall I.1

Unter Berücksichtigung von (47) gilt:

$$\eta_{f_{ts}} = \frac{\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^{i+r(m+1)} f_{ri} D_{ri}}{\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^{i+r(m+1)} (-1)^{i+K_r} D_{ri}} = (-1)^{K_r} \frac{\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i f_{ri} D_{ri}}{\sum_{i=0}^{m+1} D_{ri}}$$

$$= (-1)^{K_r} \frac{\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i f_{ri} \prod_{\substack{0 \leq l \leq k \leq m+1 \\ l \neq i \neq k}} (x_{rk} - x_{rl})}{\sum_{i=0}^{m+1} \prod_{\substack{0 \leq l \leq k \leq m+1 \\ l \neq i \neq k}} (x_{rk} - x_{rl})}$$

Wir erweitern nun diesen Bruch mit

$$\frac{1}{\prod_{0 \leq l \leq k \leq m+1} (x_{rk} - x_{rl})}$$

$$= \frac{1}{\prod_{\substack{0 \leq l \leq k \leq m+1 \\ l \neq i \neq k}} (x_{rk} - x_{rl}) (-1)^{m+1-i} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m+1} (x_{ri} - x_{rj})}$$

(i beliebig aus $\{0, 1, \dots, m+1\}$)

Dann folgt:

$$(52) \quad \eta_{f_{ts}} = (-1)^{K_r} \frac{\sum_{i=0}^{m+1} f_{ri} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m+1} \frac{1}{x_{ri} - x_{rk}}}{\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m+1} \frac{1}{x_{ri} - x_{rk}}}$$

$$= (-1)^{K_r} \frac{\sum_{i=0}^{m+1} f_{ri} \lambda_{ri}^{(m+1)}}{\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \lambda_{ri}^{(m+1)}}$$

mit

$$(53) \quad \lambda_{ri}^{(m+1)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m+1} \frac{1}{x_{ri} - x_{rk}}, \quad 0 \leq i \leq m+1.$$

Fall I.2

Unter Berücksichtigung von (51) gilt:

$$\eta_{f_{ts}} = \frac{\sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^m (-1)^{j(m+1)+i} f_{ji} D_{ji}}{\sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^m (-1)^{j(m+1)+i} (-1)^{K_j+i} D_{ji}}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^m B_{ji} \frac{\prod_{t=0}^n \left(\prod_{0 \leq l \leq k \leq m-N_t} (x_{tk} - x_{tl}) \right) \prod_{0 \leq l \leq k \leq m} (x_{jk} - x_{jl})}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^r |y_j - y_k|} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^m \frac{\prod_{t=0}^n \left(\prod_{0 \leq l \leq k \leq m-N_t} (x_{tk} - x_{tl}) \right) \prod_{0 \leq l \leq k \leq m} (x_{jk} - x_{jl})}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^r |y_j - y_k|}}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^r |y_j - y_k|} \end{aligned}$$

mit $B_{ji} = (-1)^{K_j+i} f_{ji}$. Wir erweitern nun diesen

Bruch mit

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\prod_{t=0}^n \left(\prod_{0 \leq l \leq k \leq m-N_t} (x_{tk} - x_{tl}) \right)} \\
 &= \frac{(-1)^{m-i}}{\prod_{\substack{t=0 \\ t \neq j}}^n \left(\prod_{0 \leq l \leq k \leq m-N_t} (x_{tk} - x_{tl}) \right) \prod_{\substack{0 \leq l \leq k \leq m \\ l \neq i+k}} (x_{jk} - x_{jl}) \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^m (x_{ji} - x_{js})}
 \end{aligned}$$

(für i beliebig aus $\{0, 1, \dots, m\}$, j beliebig aus $\{0, 1, \dots, r\}$)

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \eta_{f_{ts}} &= \frac{\sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^m (-1)^{K_j} f_{ji} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{1}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^r \frac{1}{y_j - y_l}}{\sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^m (-1)^i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{1}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^r \frac{1}{y_j - y_l}} \\
 &= \frac{\sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^m f_{ji} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{1}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^r \frac{1}{y_j - y_l}}{\sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^m (-1)^{1+K_j} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{1}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^r \frac{1}{y_j - y_l}}
 \end{aligned}$$

und somit

$$(54) \quad \eta_{f_{ts}} = \frac{\sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^m f_{ji} \lambda_{ji}^{(m,r)}}{\sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^m (-1)^{K_j+i} \lambda_{ji}^{(m,r)}}$$

mit

$$(55) \quad \lambda_{ji}^{(m,r)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{1}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{l=0}^r \frac{1}{y_j - y_l}$$

Da

$$(\pi_{mn}^{(M_0, \dots, M_n)}; \in (x_{ji}, y_j) : 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m - M_j)$$

ein IS ist, wird eine Lösung des DČAP durch das

Polynom $P \in \pi_{mn}^{(0, M_1, \dots, M_n)}$ mit

$$(56) \quad P(x, y) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-M_j} (f_{ji} - (-1)^{K_j+i} \eta_{f_{ts}}) l_{ji}(x, y)$$

gegeben, wobei $\{l_{ji} : 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m - M_j\}$ die Dualbasis zu den Punktfunktionalen $\in (x_{ji}, y_j)$ ist,

$0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m - M_j$ und $\eta_{f_{ts}}$ im Falle I.1 gemäß (52) und im Fall I.2 gemäß (54) bestimmt wird.

Im allgemeinen ist das so bestimmte P nicht die einzige Lösung des DČAP (vgl. die Beispiele am Ende dieses Paragraphen).

Wir kommen nun zum

Fall II

Wir setzen

$$(x^*, y^*) = (x_{(n+1)0}, y_{n+1})$$

$$f^* = f_{(n+1)0}$$

$$M_{n+1} = m$$

Gemäß § 2 gilt dann:

Die Punktfunktionale $\in (x_{ji}, y_j) (0 \leq j \leq n+1, 0 \leq i \leq m - M_j)$ sind linear unabhängig auf dem Polynomraum $\Pi_{m(n+1)}^{(M_0, M_1, \dots, M_n, M_{n+1})}$, und die Determinante

$$G = \begin{vmatrix} x_0^{m-M_0} & y_0 x_0^{m-M_1} & \dots & y_0 x_0^{m-M_n} & y_0 x_0^{n+1} \\ x_1^{m-M_0} & y_1 x_1^{m-M_1} & \dots & y_1 x_1^{m-M_n} & y_1 x_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{m-M_0} & y_n x_n^{m-M_1} & \dots & y_n x_n^{m-M_n} & y_n x_n^{n+1} \\ x_{n+1}^{m-M_0} & y_{n+1} x_{n+1}^{m-M_1} & \dots & y_{n+1} x_{n+1}^{m-M_n} & y_{n+1} x_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix}$$

ist von Null verschieden.

Durch Streichen der letzten Spalte und der Zeile mit

den Potenzen $x_{ji}^k y_j^l$ entstehen wieder die Determinanten D_{ji} , $0 \leq j \leq n+1$, $0 \leq i \leq m - M_j$. Nach Voraussetzung gilt insbesondere

$$D_{(n+1)0} \neq 0.$$

Für $0 \leq j \leq n+1$, $0 \leq i \leq m - M_j$ setzen wir

$$s_{ji} = \begin{cases} \text{sign } [D_{ji}] e_{ji} & \text{für } D_{ji} \neq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gibt es genau zwei Polynome $\tilde{R}$ und $\tilde{Q}$ aus

$$\Pi_{m(n+1)}^{(M_0, \dots, M_n, m)} \quad \text{mit}$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{R}(x_{ji}, y_j) &= s_{ji} \\ \tilde{Q}(x_{ji}, y_j) &= f_{ji} \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq j \leq n+1, \quad 0 \leq i \leq m - M_j.$$

Mit

$$\tilde{R}(x, y) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-M_j} \tilde{A}_{ji} x^i y^j + \tilde{A}_{(n+1)0} y^{n+1}$$

$$\tilde{Q}(x, y) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-M_j} \tilde{B}_{ji} x^i y^j + \tilde{B}_{(n+1)0} y^{n+1}$$

gilt aufgrund der Darstellungsformel (16) für die

Dualbasiselemente:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{(n+1)0} &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-M_j} s_{ji} \left(- \sum_{k=j}^n G'_{ji}^{(k)} (x_{(n+1)0}, y_{n+1}) \prod_{l=0}^n \frac{1}{y_{n+1}-y_l} \right) \\ &\quad + s_{(n+1)0} \prod_{l=0}^n \frac{1}{y_{n+1}-y_l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{(n+1)0} &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{m-M_j} f_{ji} \left(- \sum_{k=j}^n G'_{ji}^{(k)} (x_{(n+1)0}, y_{n+1}) \prod_{l=0}^n \frac{1}{y_{n+1}-y_l} \right) \\ &\quad + f_{(n+1)0} \prod_{l=0}^n \frac{1}{y_{n+1}-y_l} \end{aligned}$$

Analog zum Fall I zeigt man zunächst $\tilde{A}_{(n+1)0} \neq 0$ und damit dann, daß das Polynom

$$\tilde{P} = \tilde{Q} - \frac{\tilde{B}_{(n+1)0}}{\tilde{A}_{(n+1)0}} \tilde{R} \in \pi_{mn}^{(M_0, M_1, \dots, M_n)}$$

Lösung der diskreten Čebyšev-Approximationsaufgabe ist mit

$$\max_{\substack{0 \leq j \leq n+1 \\ 0 \leq i \leq m-M_j}} |f_{ji} - \tilde{P}(x_{ji}, y_j)| = \left| \frac{\tilde{B}_{(n+1)0}}{\tilde{A}_{(n+1)0}} \right|$$

Beispiel 5.4

Wir betrachten wieder das "vollständige" Punktgitter W aus (19) und den zugehörigen Polynomraum Π_{mn} . Auf der Geraden

$$G_r = \{(x, y_r) : a \leq x \leq b\}, r \in \{0, 1, \dots, n\},$$

nehmen wir den Punkt $(x_{r(m+1)}, y_r)$ hinzu.

O.B.d.A. können wir

$$x_{j0} < x_{j1} < \dots < x_{jm}, 0 \leq j \leq n, j \neq r$$

$$x_{r0} < x_{r1} < \dots < x_{r(m+1)}$$

voraussetzen.

Wegen

$$m - M_r + 1 = m + 1 \geq m$$

hat das "erweiterte" Punktgitter $W \cup \{(x_{r(m+1)}, y_r)\}$ die Eigenschaft Z ; und zwar ist es von der im Fall I.1 betrachteten Art. Nach Satz 5.3 ist das Tupel

$$(\Pi_{mn}; \in (x_{ji}, y_j) : (x_{ji}, y_j) \in W \cup \{(x_{r(m+1)}, y_r)\});$$

$$(-1)^{K_j+i} : 0 \leq j \leq n, \begin{matrix} 0 \leq i \leq m+1 & (j=r) \\ 0 \leq i \leq m & (j \neq r) \end{matrix}$$

daher ein DČAS, und das Polynom

$P(x, y)$

$$= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m (f_{ji} - (-1)^{K_j+i} (-1)^{K_r} \frac{\sum_{s=0}^{m+1} f_{rs} \prod_{k=0}^{m+1} \frac{1}{x_{rs} - x_{rk}}}{\sum_{s=0}^{m+1} (-1)^s \prod_{k=0}^{m+1} \frac{1}{x_{rs} - x_{rk}}}) \times$$

$$\times \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - x_{jk}}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{y - y_l}{y_j - y_l}$$

ist gemäß (56) in Verbindung mit (52) und Beispiel 3.2 eine Lösung des DČAP, allerdings im allgemeinen nicht die einzige, denn offensichtlich löst auch

$$R(x, y) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m f_{ji} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - x_{jk}}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{y - y_l}{y_j - y_l}$$

$$+ \sum_{i=0}^m (f_{ri} - (-1)^i \frac{\sum_{s=0}^{m+1} f_{rs} \prod_{k=0}^{m+1} \frac{1}{x_{rs} - x_{rk}}}{\sum_{s=0}^{m+1} (-1)^s \prod_{k=0}^{m+1} \frac{1}{x_{rs} - x_{rk}}}) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - x_{rk}}{x_{ri} - x_{rk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq r}}^n \frac{y - y_l}{y_r - y_l}$$

das DČAP.

Beispiel 5.5

Im Beispiel 3.3 hatten wir das "verminderte" Punktgitter W' (vgl. (20)) und den zugehörigen Polynomraum Π'_{mn} betrachtet. Wir erweitern nun dieses Punktgitter durch Hinzunahme des Punktes (x_{nm}, y_n) und setzen wieder o.B.d.A. voraus, daß

$$x_{j0} < x_{j1} < \dots < x_{jm}, \quad 0 \leq j \leq n,$$

gilt. Aus

$$m - M_n + 1 = m$$

folgt, daß das "erweiterte" Punktgitter $W = W' \cup \{(x_{nm}, y_n)\}$ die Eigenschaft Z besitzt. Das Tupel

$$\begin{aligned} (\pi'_{mn}; \in_{(x_{ji}, y_j)} : 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m; \\ (-1)^{K_j+1} : 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m) \end{aligned}$$

ist somit gemäß Satz 5.3 ein DCAS. Aus (56) folgt dann, daß

$$\begin{aligned} P'(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^m (f_{ji} - (-1)^{K_j+1} \eta_{f_{ts}})^{K_j+1} l_{ji}(x, y) \\ + \sum_{i=0}^{m-1} (f_{ni} - (-1)^{K_n+1} \eta_{f_{ts}})^{K_n+1} l_{ni}(x, y) \end{aligned}$$

eine Lösung des DČAP ist, wobei die l_{ji} die Dualbasis zu den Punktfunktionalen $\epsilon_{(x_{ji}, y_j)}$

$(0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m (j \neq n), 0 \leq i \leq m - 1$

$(j = n))$ bilden und $\eta_{f_{ts}}$ gemäß (54) bestimmt wird, da W von der im Fall I.2 betrachteten Art ist.

P' läßt sich nun allerdings einfacher darstellen.

Gemäß (29) gilt nämlich für P':

$$P'(x_{ji}, y_j) = f_{ji} - (-1)^{j+i} \eta_{f_{ts}}, \\ 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m.$$

Andererseits gibt es, da die Punktfunktionale

$\epsilon_{(x_{ji}, y_j)}$ ($0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m$) linear unabhängig

auf dem Polynomraum π_{mn} sind, genau ein Polynom aus

π_{mn} , das in den Punkten (x_{ji}, y_j) die Werte

$(f_{ji} - (-1)^{j+i} \eta_{f_{ts}})$ annimmt, $0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m$.

Dieses Polynom ist natürlich P'. Da wegen (50) und Satz 4.6 P' eindeutig bestimmt ist, können wir insgesamt sagen:

$P'(x, y)$

$$= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m (f_{ji} - (-1)^{j+i} \eta_{f_{ts}}) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - x_{jk}}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{y - y_l}{y_j - y_l}$$

mit

$$\eta_{f_{ts}} = \frac{\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m f_{ji} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{1}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{1}{y_j - y_l}}{\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m (-1)^{K_{ji}+i} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{1}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{1}{y_j - y_l}}}$$

ist die eindeutig bestimmte Lösung des DČAP.

Geht man andererseits von der Aufgabe aus, eine auf einem kompakten Bereich $\Omega \subseteq [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ definierte und dort stetige Funktion f auf dem Punktgitter

$$W = \bigcup_{j=0}^n \{x_{j0}, x_{j1}, \dots, x_{jm}\} \times \{y_j\} \subseteq \Omega$$

mit

$$c \leq y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n \leq d$$

$$a \leq x_{j0} \leq x_{j1} \leq \dots \leq x_{jm} \leq b, \quad 0 \leq j \leq n,$$

durch Polynome aus Π'_{mn} zu approximieren, so ist also

$$(57) \quad P(x, y)$$

$$= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m (f(x_{ji}, y_j) - (-1)^{j+i} \eta_f) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - x_{jk}}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{y - y_l}{y_j - y_l}$$

mit

$$(58) \quad \eta_f = \frac{\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m f(x_{ji}, y_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{1}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{l=0}^n \frac{1}{y_j - y_l}}{\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m (-1)^{j+i} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{1}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{l=0}^n \frac{1}{y_j - y_l}}$$

das eindeutig bestimmte Polynom bester Approximation an f auf W bezüglich π'_{mn} . Darüberhinaus ist P aufgrund von Satz 4.8 die eindeutig bestimmte Minimallösung auf jeder kompakten Teilmenge K mit

$$W \subseteq K \subseteq \Omega,$$

für die gilt:

$$|\eta_f| = \max_{(x,y) \in K} |f(x,y) - P(x,y)|.$$

Bemerkung 5.6:

Für $K = \Omega$ folgt hieraus insbesondere der Satz 1 von H. EHLICH und W. HAUSSMANN [4].

Hilfssatz 4.7 liefert für W und π'_{mn} den Hilfssatz 1 von H. EHLICH und W. HAUSSMANN [4], Satz 4.10 den folgenden Satz vom de la Vallée-Poussin-Typ:

Gibt es zu einer Funktion $f \in C(\Omega)$ und einem Polynom $P \in \Pi'_{mn}$ ein Punktgitter W und $(n+1)(m+1)$ positive reelle Zahlen r_{ji} mit der Eigenschaft

$$\varepsilon(-1)^{j+i}(f - P)(x_{ji}, y_j) = r_{ji}, \quad 0 \leq j \leq n, \quad 0 \leq i \leq m, \\ \varepsilon = \pm 1,$$

so gilt die Abschätzung

$$\min_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 0 \leq i \leq m}} r_{ji} \leq \min_{Q \in \Pi'_{mn}} \|f - Q\|_{\Omega}.$$

(vgl. M. SOMMER [22]).

§ 6 Beispiel: Der Satz von EHLICH und ZELLER

Auf der Punktmenge

$$\left\{ \cos \frac{m-i}{m} \pi : 0 \leq i \leq m \right\} \times \left\{ \cos \frac{n-j}{n} \pi : 0 \leq j \leq n \right\} \\ \subset [-1, 1] \times [-1, 1]$$

soll die Funktion

$$f : [-1, 1] \times [-1, 1] \ni (x, y) \longmapsto 2^{m-1} 2^{n-1} x^m y^n$$

durch Polynome aus Π'_{mn} approximiert werden.

Bevor wir mit der Berechnung der besten Approximation P^* beginnen, stellen wir einige Beziehungen zusammen, die wir im folgenden benötigen:

Das eindeutig bestimmte Polynom höchstens r -ten Grades ($r \in \mathbb{N}$), das in den Punkten $\cos \frac{r-t}{r} \pi$, $0 \leq t \leq r$, die Werte $(\cos \frac{r-t}{r} \pi)^r$, $0 \leq t \leq r$, annimmt, ist

$$(59) \quad \sum_{t=0}^r (\cos \frac{r-t}{r} \pi)^r \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq t}}^r \frac{x - \cos \frac{r-k}{r} \pi}{\cos \frac{r-t}{r} \pi - \cos \frac{r-k}{r} \pi} = x^r$$

Sein Höchstkoeffizient ist

$$(60) \quad \sum_{t=0}^r (\cos \frac{r-t}{r} \pi)^x \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq t}}^r \frac{1}{\cos \frac{r-t}{r} \pi - \cos \frac{r-k}{k} \pi} = 1.$$

Das eindeutig bestimmte Polynom höchstens r -ten Grades ($r \in \mathbb{N}$), das in den Punkten $\cos \frac{r-t}{r} \pi$, $0 \leq t \leq r$, die Werte $(-1)^t$, $0 \leq t \leq r$, annimmt, ist $(-1)^x T_r$, wobei T_r das r -te Čebyšev-Polynom (erster Art) $T_r(x) = \cos(r \arccos x)$ ist, d. h.

$$(61) \quad \sum_{t=0}^r (-1)^t \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq t}}^r \frac{x - \cos \frac{r-k}{r} \pi}{\cos \frac{r-t}{r} \pi - \cos \frac{r-k}{r} \pi} = (-1)^x T_r(x)$$

Sein Höchstkoeffizient lautet

$$(62) \quad \sum_{t=0}^r (-1)^t \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq t}}^r \frac{1}{\cos \frac{r-t}{r} \pi - \cos \frac{r-k}{r} \pi} = (-1)^x 2^{r-1}$$

Wir bestimmen nun

$$\eta_f = \frac{\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m f(\cos \frac{m-i}{m} \pi, \cos \frac{n-j}{n} \pi) \lambda_{ji}^{(m,n)}}{\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m (-1)^{j+i} \lambda_{ji}^{(m,n)}}$$

wobei die $\lambda_{ji}^{(m,n)}$ gemäß (55) definiert sind.

Im Zähler ergibt sich mit (60):

$$(63) \quad \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m f\left(\cos \frac{m-i}{m} \pi, \cos \frac{n-j}{n} \pi\right) \lambda_{ji}^{(m,n)}$$

$$= 2^{m-1} 2^{n-1}$$

$$\sum_{j=0}^n \left\{ \sum_{i=0}^m \left(\cos \frac{m-i}{m} \pi \right)^m \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{1}{\cos \frac{m-i}{m} \pi - \cos \frac{m-k}{m} \pi} \right\} \times$$

$$\times \left(\cos \frac{n-j}{n} \pi \right)^n \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{1}{\cos \frac{n-j}{n} \pi - \cos \frac{n-l}{n} \pi}$$

$$= 2^{m-1} 2^{n-1}$$

Für den Nenner erhalten wir mit (62):

$$(64) \quad \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m (-1)^{j+i} \lambda_{ji}^{(m,n)}$$

$$= \sum_{j=0}^n \left\{ \sum_{i=0}^m (-1)^i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{1}{\cos \frac{m-i}{m} \pi - \cos \frac{m-k}{m} \pi} \right\} \times$$

$$\times (-1)^j \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{1}{\cos \frac{n-j}{n} \pi - \cos \frac{n-l}{n} \pi}$$

$$= (-1)^m 2^{m-1} (-1)^n 2^{n-1}$$

Aus (63) und (64) folgt

$$(65) \quad \eta_f = (-1)^{m+n}$$

Mit (57), (59) und (61) gilt daher für die Minimal-
lösung P^* :

$$P^*(x, y)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m (2^{m-1} 2^{n-1} (\cos \frac{m-i}{m} \pi)^m (\cos \frac{n-j}{n} \pi)^n \\
 &\quad - (-1)^{j+i} (-1)^{n+m}) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - \cos \frac{m-k}{m} \pi}{\cos \frac{m-i}{m} \pi - \cos \frac{m-k}{m} \pi} x \\
 &\quad \times \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{y - \cos \frac{n-l}{n} \pi}{\cos \frac{n-j}{n} \pi - \cos \frac{n-l}{n} \pi} y \\
 &= 2^{m-1} 2^{n-1} x \\
 &\quad \times \sum_{j=0}^n \left\{ \sum_{i=0}^m (\cos \frac{m-i}{m} \pi)^m \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - \cos \frac{m-k}{m} \pi}{\cos \frac{m-i}{m} \pi - \cos \frac{m-k}{m} \pi} \right\} x \\
 &\quad \times (\cos \frac{n-j}{n} \pi)^n \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{y - \cos \frac{n-l}{n} \pi}{\cos \frac{n-j}{n} \pi - \cos \frac{n-l}{n} \pi} y \\
 &= (-1)^{n+m} \sum_{j=0}^n \left\{ \sum_{i=0}^m (-1)^i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - \cos \frac{m-k}{m} \pi}{\cos \frac{m-i}{m} \pi - \cos \frac{m-k}{m} \pi} \right\} x
 \end{aligned}$$

$$x(-1)^j \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{y - \cos \frac{n-l}{n} \pi}{\cos \frac{n-j}{n} \pi - \cos \frac{n-l}{n} \pi}$$

$$= 2^{m-1} 2^{n-1} x^m y^n - T_m(x) T_n(y)$$

Insgesamt gilt also: Das Polynom $P^* \in \Pi'_{mn}$ mit

$$P^*(x,y) = 2^{m-1} 2^{n-1} x^m y^n - T_m(x) T_n(y)$$

ist das eindeutig bestimmte Polynom bester Approximation an f auf

$$\{(\cos \frac{m-i}{m} \pi, \cos \frac{n-j}{n} \pi) : 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m\}$$

Aus

$$\begin{aligned} & \max_{(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]} |(f-P^*)(x,y)| \\ &= \max_{(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]} |T_m(x) T_n(y)| = 1 = |\eta_f| \end{aligned}$$

folgt nun die bekannte Aussage von H. EHLICH und K. ZELLER [5], daß P^* das eindeutig bestimmte Polynom bester Approximation an f auf ganz $[-1,1] \times [-1,1]$ (bezüglich Π'_{mn}) ist.

Schlußbemerkungen

1) Unsere Ergebnisse lassen sich auf den n -dimensionalen Fall übertragen. Wie dies geschieht, wollen wir hier kurz für $n = 3$ andeuten:

Im Quader

$$[a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3 \quad (b \geq a, d \geq c, f \geq e)$$

sei das "vollständige" Punktgitter W gegeben:

$$\begin{aligned} W &= \bigcup_{k=0}^r \left\{ \bigcup_{j=0}^n \{x_{kjo}, x_{kji}, \dots, x_{kjm}\} \times \{y_{kj}\} \right\} \times \{z_k\} \\ &= \{(x_{kji}, y_{kj}, z_k) : 0 \leq k \leq r, 0 \leq j \leq n, \\ &\quad 0 \leq i \leq m\} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} z_k &\neq z_{k'}, \quad k \neq k', \\ y_{kj} &\neq y_{kj'}, \quad j \neq j', \quad 0 \leq k \leq r, \\ x_{kji} &\neq x_{kji'}, \quad i \neq i', \quad 0 \leq k \leq r, \quad 0 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Aus diesem Gitter werden auf den einzelnen Ebenen

$$E_k = \{(x, y, z_k) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}, \quad 0 \leq k \leq r,$$

die Punkte auf N_k Geraden ($0 \leq N_k \leq n$) sämtlich entfernt. Außerdem werden auf den verbleibenden Geraden

$$G_{kj} = \{(x, y_{kj}, z_k) : a \leq x \leq b\}$$

jeweils M_{kj} Punkte herausgenommen mit $0 \leq M_{kj} \leq m$.

Da wir weder für die Ebenen noch für die Geraden auf den Ebenen noch für die Punkte auf den Geraden eine Anordnung vorschreiben, können wir o.B.d.A. folgende Vereinbarungen treffen:

(a) $0 \leq N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_r \leq n$.

(b) Es werden jeweils die Geraden

$$G_{k0}, G_{k1}, \dots, G_{k(n-N_k)}$$

auf den Ebenen belassen, $0 \leq k \leq r$.

(c) $0 \leq M_{k0} \leq M_{k1} \leq \dots \leq M_{k(n-N_k)} \leq m$,
 $0 \leq k \leq r$.

(d) Es werden jeweils die Punkte

$$(x_{kj0}, y_{kj}, z_k), (x_{kj1}, y_{kj}, z_k), \dots,$$

$$(x_{kj(m-M_{kj})}, y_{kj}, z_k), 0 \leq k \leq r,$$

$0 \leq j \leq n - N_k$, auf den Geraden belassen.

Dieses "verminderte" Punktgitter liefert dann

$$(m+1)(n+1)(r+1) - \sum_{k=0}^r (N_k(m+1) + \sum_{j=0}^{n-N_k} M_{kj})$$

Punktfunktionale

$$(66) \quad \in (x_{kj1}, y_{kj}, z_k), \quad 0 \leq k \leq r, \quad 0 \leq j \leq n - N_k, \\ 0 \leq i \leq m - M_{kj}.$$

Betrachtet man nun den Polynomraum

$$(67) \quad \prod_{mnr}^{(N_0, \dots, N_r; M_{kj} : 0 \leq k \leq r, 0 \leq j \leq n - N_k)}$$

$$= \{P : P(x, y, z) = \sum_{k=0}^r \sum_{j=0}^{n-N_k} \sum_{i=0}^{m-M_{kj}} a_{ijk} x^i y^j z^k\}$$

und gilt zusätzlich

$$(68) \quad M_{0j} \leq M_{1j} \leq \dots \leq M_{rj}, \quad 0 \leq j \leq n - N_0,$$

wobei $M_{kj} = m + 1$ für $j \geq n - N_k$ gesetzt wird, so sind die Punktfunktionale (66) linear unabhängig auf dem Polynomraum (67).

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß die Dimension des Polynomraums (67) mit der Anzahl der Punktfunktionale (68) offensichtlich übereinstimmt. Dann definieren wir die Matrizen

$$X_{kj}^1 = \begin{bmatrix} 1 & x_{kj0} & \dots & x_{kj0}^1 \\ 1 & x_{kj1} & \dots & x_{kj1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{kj(m-M_{kj})} & \dots & x_{kj(m-M_{kj})}^1 \end{bmatrix}$$

und mit diesen die Matrizen

$$X_k^p = \begin{bmatrix} X_{k0}^{m-M_{p0}} & Y_{k0} X_{k0}^{m-M_{p1}} & \dots & Y_{k0}^p X_{k0}^{m-M_{p(n-N_p)}} \\ X_{k1}^{m-M_{p0}} & Y_{k1} X_{k1}^{m-M_{p1}} & \dots & Y_{k1}^p X_{k1}^{m-M_{p(n-N_p)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{k(n-N_k)}^{m-M_{p0}} & Y_{k(n-N_k)} X_{k(n-N_k)}^{m-M_{p1}} & \dots & Y_{k(n-N_k)}^p X_{k(n-N_k)}^{m-M_{p(n-N_p)}} \end{bmatrix}$$

Für die gemäß Satz 1.3 zu bestimmende Determinante

$$G \text{ gilt dann mit } e_t = \sum_{j=0}^{n-N_t} (m+1-M_{tj}) \quad (0 \leq t \leq r)$$

$$G = \det(x_{\rho\nu\mu}^i y_{\rho\nu}^j z_{\rho}^k) \quad (0 \leq k, \rho \leq r, \quad 0 \leq j \leq n-N_k, \quad 0 \leq \nu \leq n-N_{\rho},$$

$$0 \leq i \leq m-M_{kj}, \quad 0 \leq \mu \leq m-M_{\rho\nu})$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} X_0^0 & z_0 X_0^1 & \dots & z_0^r X_0^r \\ X_1^0 & z_1 X_1^1 & \dots & z_1^r X_1^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_r^0 & z_r X_r^1 & \dots & z_r^r X_r^r \end{vmatrix} \\ &= \prod_{0 \leq s < t \leq r} (z_t - z_s)^{e_t} \prod_{k=0}^r \det(X_k^k) \\ &= \prod_{0 \leq s < t \leq r} (z_t - z_s)^{e_t} \prod_{k=0}^r \left(\prod_{0 \leq s' < t' \leq n-N_k} (y_{kt'} - y_{ks'})^{m+1-M_{kt'}} \right) \end{aligned}$$

$$\times \prod_{j=0}^{n-N_k} \left(\prod_{0 \leq s < t \leq m-M_{kj}} (x_{kjt} - x_{kjs}) \right) \neq 0.$$

2) H. EHLICH und W. HAUSSMANN betrachten in [4] die halbdiskrete Čebyšev-Approximation im $\mathbb{R}^2$:

Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $c \leq y_0 < y_1 < \dots < y_n \leq d$. Weiter sei $G_j = [a, b] \times \{y_j\}$ ($0 \leq j \leq n$) und $T = \bigcup_{j=0}^n G_j$ eine Menge achsenparalleler Geraden. Dann wird die Čebyšev-Approximationsaufgabe in $C(T)$ bezüglich eines Polynomraumes Π als halbdiskretes Čebyšev-Approximationsproblem bezeichnet.

Für $\Pi = \Pi_{mn}$ läßt sich die Minimallösung $P^* \in \Pi_{mn}$ für ein beliebiges $f \in C(T)$ leicht angeben: Für $0 \leq j \leq n$ setzen wir

$$f_j : [a, b] \ni x \longmapsto f(x, y_j)$$

und bestimmen, etwa mit Hilfe des Remez-Algorithmus, das eindeutig bestimmte Polynom P_j bester Approximation an f_j auf $[a, b]$ bezüglich $\Pi_m = \{P : P(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i\}$ und eine Čebyšev-Alternante, d. h. $m + 2$ Punkte

$$(69) \quad a \leq x_{j0} < x_{j1} < \dots < x_{j(m+1)} \leq b$$

mit

$$(f_j - P_j)(x_{ji}) = (-1)^i \varepsilon_j \max_{a \leq x \leq b} |f_j(x) - P_j(x)| =: (-1)^i \eta_j,$$

$$0 \leq i \leq m+1, \varepsilon_j = \pm 1.$$

P_j lässt sich darstellen in der Form

$$P_j(x) = \sum_{i=0}^m (f_j(x_{ji}) - (-1)^i \eta_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - x_{jk}}{x_{ji} - x_{jk}}.$$

Dann ist

$$(70) \quad P^*(x, y)$$

$$= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m (f(x_{ji}, y_j) - (-1)^i \eta_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - x_{jk}}{x_{ji} - x_{jk}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^n \frac{y - y_l}{y_j - y_l}$$

Minimallösung für f auf T bezüglich Π_{mn} .

Es ist nämlich für $0 \leq j \leq n$

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x, y_j) - P^*(x, y_j)| = |\eta_j|$$

und somit

$$\|f - P^*\|_T = \max_{(x, y) \in T} |(f - P^*)(x, y)| = \max_{0 \leq j \leq n} |\eta_j| =: |\eta_r|,$$

$$r \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Das stetige lineare Funktional F aus $(C(T))'$ mit

$$F : C(T) \ni f \longmapsto \frac{\sum_{i=0}^{m+1} f(x_{ri}, y_r) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m+1} \frac{1}{x_{ri} - x_{rk}}}{\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m+1} \frac{1}{x_{ri} - x_{rk}}} \in \mathbb{R}$$

hat dann die Eigenschaften

- (i) $\|F\|_{(C(T))'} \leq 1,$
- (ii) $F(P) = 0$ für alle $P \in \pi_{mn},$
- (iii) $|F(f)| = |F(f-P^*)| = |\eta_r| = \|f - P^*\|_T.$

Mit Satz 4.2 folgt die Behauptung.

Für $\pi = \pi'_{mn}$ geben H. EHLICH und W. HAUSSMANN in der genannten Arbeit eine Charakterisierung der Minimallösung:

Es sei $f \in C(T), P' \in \pi'_{mn} (m, n \geq 1).$ P' ist genau dann Minimallösung für f (auf T bezüglich π'_{mn}), wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a) Es gibt auf jeder Geraden G_j $m+1$ Punkte (x_{ji}, y_j) mit

$$a \leq x_{j0} < x_{j1} < \dots < x_{jm} \leq b, \quad 0 \leq j \leq n,$$

und

$$\epsilon(-1)^{j+i} (f(x_{ji}, y_j) - P'(x_{ji}, y_j)) = \|f - P'\|_T,$$

$$0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n, \epsilon = \pm 1.$$

- (b) Es gibt auf einer Geraden G_l ($l \in \{0, 1, \dots, n\}$) mindestens $m + 2$ Punkte (x_{li}, y_l) mit

$$a \leq x_{l0} < x_{l1} < \dots < x_{l(m+1)} \leq b$$

und

$$\epsilon(-1)^i (f(x_{li}, y_l) - P'(x_{li}, y_l)) = \|f - P'\|_T,$$

$$0 \leq i \leq m + 1, \epsilon = \pm 1.$$

Dabei ist die beste Approximation P' genau dann eindeutig bestimmt, wenn die in (a) beschriebene Situation vorliegt.

Dieses alternative Aussehen der Minimallösung macht bei ihrer Konstruktion erhebliche Schwierigkeiten. Es liegt nahe, in Analogie zum Austausch-Algorithmus von Remez im Eindimensionalen wie folgt vorzugehen:

Ausgehend von einem beliebigen "vollständigen" (Ausgangs-) Punktgitter

$$W^{(0)} = \bigcup_{j=0}^n \{a \leq x_{j0}^{(0)} < x_{j1}^{(0)} < \dots < x_{jm}^{(0)} \leq b\} \times \{y_j\}$$

bestimmt man gemäß (57) und (58) das eindeutig bestimmte Polynom bester Approximation $p^{(0)} \in \pi'_{mn}$ an f auf $W^{(0)}$ und die zugehörige Minimalabweichung $\eta_f^{(0)}$. Gilt

$$\|f - p^{(0)}\|_T = |\eta_f^{(0)}|,$$

so ist man fertig.

Andernfalls gilt

$$\|f - p^{(0)}\|_T > |\eta_f^{(0)}|,$$

und es gibt einen Punkt $(\xi, y_1) \in T$, so daß gilt

$$|(f - p^{(0)})(\xi, y_1)| = \|f - p^{(0)}\|_T > |\eta_f^{(0)}|.$$

Bildet man nun ein neues "vollständiges" Punktgitter

$$W^{(1)} = \bigcup_{j=0}^n \{a \leq x_{j0}^{(1)} < x_{j1}^{(1)} < \dots < x_{jm}^{(1)} \leq b\} \times \{y_j\},$$

indem man

$$x_{ji}^{(1)} = x_{ji}^{(0)}, \quad 0 \leq j \leq n, \quad j \neq 1, \quad 0 \leq i \leq m,$$

setzt und die $x_{1i}^{(1)}$ gemäß der folgenden Ersetzungsvorschrift bestimmt ($r_1 = f_1 - p_1^{(0)}$,
 $s = \text{sign}[r_1(\xi)]$):

Voraussetzung	Man setze (ξ, y_1) an Stelle von	
$a \leq \xi \leq x_{10}^{(o)}$	$s = \text{sign}[r_1(x_{10}^{(o)})]$	$(x_{10}^{(o)}, y_1)$
$a \leq \xi \leq x_{10}^{(o)}$	$s = -\text{sign}[r_1(x_{10}^{(o)})]$	$(x_{1m}^{(o)}, y_1) \quad (*)$
$0 \leq i \leq m - 1:$		
$x_{1i}^{(o)} \leq \xi \leq x_{1(i+1)}^{(o)}$	$s = \text{sign}[r_1(x_{1i}^{(o)})]$	$(x_{1i}^{(o)}, y_1)$
$x_{1i}^{(o)} \leq \xi \leq x_{1(i+1)}^{(o)}$	$s = -\text{sign}[r_1(x_{1i}^{(o)})]$	$(x_{1(i+1)}^{(o)}, y_1)$
$x_{1m}^{(o)} \leq \xi \leq b$	$s = \text{sign}[r_1(x_{1m}^{(o)})]$	$(x_{1m}^{(o)}, y_1)$
$x_{1m}^{(o)} \leq \xi \leq b$	$s = -\text{sign}[r_1(x_{1m}^{(o)})]$	$(x_{10}^{(o)}, y_1) \quad (**)$

so kann man das eindeutig bestimmte Polynom bester Approximation $P^{(1)} \in \Pi'_{mn}$ an f auf $W^{(1)}$ und die zugehörige Minimalabweichung $\eta_f^{(1)}$ gemäß (57) und (58) bestimmen, und es gilt

$$\|f - P^{(1)}\|_T \geq |\eta_f^{(1)}|.$$

Im Falle $\|f - P^{(1)}\|_T = |\eta_f^{(1)}|$ hat man eine Minimal-
lösung gefunden, ansonsten kann man den beschrie-
benen Austauschvorgang entsprechend wiederholen.

Auf diese Weise gelangt man entweder zur Minimallösung, oder man erhält eine Folge

$$\eta_f^{(0)}, \eta_f^{(1)}, \eta_f^{(2)}, \dots$$

Die Schwierigkeit liegt nun darin, daß man

$$|\eta_f^{(k+1)}| > |\eta_f^{(k)}|$$

im allgemeinen nur garantieren kann, wenn nicht die Fälle (*) und (**) auftreten (Der Beweis der Monotonie erfolgt in den übrigen Fällen völlig analog zum Eindimensionalen, vgl. etwa H. WERNER [27]). Da somit im allgemeinen Monotonie nicht vorliegt, ist es nicht sinnvoll, von einem beliebigen Ausgangsgitter $W^{(0)}$ auszugehen. Zweckmäßiger erscheint uns das folgende Vorgehen:

Wie in (70) bestimmt man die beste Approximation P^* an f auf T bezüglich Π_{mn} . Seien hierbei die Punkte

$$(x_{ji}, y_j), \quad 0 \leq j \leq n, \quad 0 \leq i \leq m+1,$$

diejenigen aus (69) und

$$|\eta_r| = \max_{0 \leq j \leq n} |\eta_j|.$$

Dann ist P^* insbesondere Minimallösung an f bezüglich Π_{mn} auf dem "erweiterten" Punktgitter

$$W^* = \{(x_{ji}, y_j) : 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m\} \cup \{(x_{r(m+1)}, y_r)\}.$$

Bezeichnet man mit $\hat{P} \in \Pi'_{mn}$ das Polynom bester Approximation an f auf W^* bezüglich Π'_{mn} , so gilt offenbar

$$\|f - \hat{P}\|_{W^*} \geq \|f - P^*\|_{W^*} = |\eta_r|$$

Für $l = 0, 1, \dots, m+1$ bestimmt man nun gemäß

$$(58) \text{ die Minimalabweichung } \eta_f^1 \text{ auf } W_1 =$$

$W^* \setminus \{(x_{r1}, y_r)\}$ und hiermit

$$\max_{0 \leq l \leq m+1} |\eta_f^l| = |\eta_f^{l_0}| =: |\eta_f^{(0)}|.$$

Gilt

$$|\eta_f^{(0)}| \geq |\eta_r|,$$

so wählt man W_{l_0} als Ausgangsgitter, wobei man die auf G_r verbliebenen Punkte unter Beibehaltung der Anordnung mit $(x_{ri}^{(0)}, y_r)$, $0 \leq i \leq m$, bezeichnet und im übrigen $(x_{ji}^{(0)}, y_j) = (x_{ji}, y_j)$, $0 \leq j \leq n$, $j \neq r$, $0 \leq i \leq m$, setzt. Gemäß (57) und (58) bestimmt man nun das eindeutig bestimmte Polynom $P^{(0)} \in \Pi'_{mn}$, das f auf dieser Punktmenge $W^{(0)} := W_{l_0}$ am besten approximiert und für das

$$(f - P^{(0)})(x_{ji}^{(0)}, y_j) = (-1)^{j+i} \eta_f^{(0)}, \quad 0 \leq j \leq n, \quad 0 \leq i \leq m,$$

gilt. Im Falle

$$\|f - P^{(0)}\|_T = |\eta_f^{(0)}|$$

ist $P^{(0)}$ die eindeutig bestimmte Minimallösung.

Andernfalls gibt es einen Punkt $(\xi, y_1) \in T$ mit

$$|(f - P^{(0)})(\xi, y_1)| = \|f - P^{(0)}\|_T > |\eta_f^{(0)}|.$$

Mit Hilfe dieses Punktes läßt sich nun gemäß der oben angegebenen Ersetzungsvorschrift ein neues Punktgitter $W^{(1)}$ bilden. Wichtig ist, daß hierbei die Fälle (*) und (**) nicht mehr auftreten können. Sonst würde nämlich mit der Festsetzung

$$\begin{aligned} z_0 &= \xi \\ z_{i+1} &= x_{li}^{(0)}, \quad 0 \leq i \leq m, \end{aligned} \quad (\text{im Falle } (*))$$

bzw.

$$\begin{aligned} z_i &= x_{li}^{(0)}, \quad 0 \leq i \leq m \\ z_{m+1} &= \xi \end{aligned} \quad (\text{im Falle } (**))$$

für das Polynom

$$Q(x) = \sum_{i=0}^m (f_1(z_i) - (-1)^i \eta) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m \frac{x - z_k}{z_i - z_k}$$

mit

$$\eta = \frac{\sum_{i=0}^{m+1} f_1(z_i) \lambda_i}{\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \lambda_i}, \quad \lambda_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{m+1} \frac{1}{z_i - z_k}, \quad 0 \leq i \leq m+1,$$

folgen:

$$f_1(z_i) - Q(z_i) = (-1)^i \eta, \quad 0 \leq i \leq m+1,$$

und

$$|\eta| = \left| \frac{\sum_{i=0}^{m+1} (f_1 - P_1^{(0)})(z_i) \lambda_i}{\sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \lambda_i} \right| = \frac{\sum_{i=0}^{m+1} |(f_1 - P_1^{(0)})(z_i)| |\lambda_i|}{\sum_{i=0}^{m+1} |\lambda_i|}$$

$$> |\eta_f^{(0)}| \geq |\eta_r| = \max_{0 \leq j \leq n} |\eta_j|,$$

im Widerspruch zum Satz von de la Vallée-Poussin.

Bei der Durchführung des oben beschriebenen Iterationsverfahrens gilt also, falls das Verfahren nicht abbricht und auf diese Weise die Minimallösung explizit liefert:

$$|\eta_f^{(0)}| < |\eta_f^{(1)}| < |\eta_f^{(2)}| < \dots,$$

und die Folge der zugehörigen Polynome $P^{(k)}$ konvergiert gleichmäßig auf T gegen die gesuchte Minimallösung P' für f auf T bezüglich Π'_{mn} . Hierbei ist zu beachten, daß P' aufgrund von

$$|\eta_f^{(1)}| > |\eta_f^{(0)}| \geq \max_{0 \leq j \leq n} |\eta_j|$$

und der Bemerkung 5.6 gemäß Teil (a) des Charakterisierungssatzes von H. EHLICH und W. HAUSSMANN charakterisiert wird und damit eindeutig bestimmt ist.

Eine offene Frage ist, wie man im Falle

$$|\eta_f^{(0)}| < |\eta_r|$$

vorgeht, wenn also $\hat{P}$ gemäß Teil (b) dieses Satzes charakterisiert wird.

Literaturverzeichnis

- [1] ACHIESER, N. I.: Vorlesungen über Approximationstheorie. Berlin: Akademie-Verlag 1967.
- [2] CURTIS, P. C., Jr.: n -parameter families and best approximation. Pacific J. Math. 9, 1013-1027 (1959).
- [3] DAVIS, P. J.: Interpolation and Approximation. Waltham, Massachusetts-Toronto-London: Blaisdell 1963.
- [4] EHLICH, H., HAUSSMANN, W.: Čebyšev-Approximation stetiger Funktionen in zwei Veränderlichen. Math. Z. 117, 21-34 (1970).
- [5] EHLICH, H., ZELLER, K.: Čebyšev-Polynome in mehreren Veränderlichen. Math. Z. 93, 142-143 (1966).
- [6] HAAR, A.: Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung stetiger Funktionen. Math. Ann. 78, 294-311 (1918).
- [7] HAUSSMANN, W.: Hermite-Interpolation in mehreren Veränderlichen. Dissertation. Bochum 1969.
- [8] HAUSSMANN, W.: Tensorprodukte und mehrdimensionale Interpolation. Math. Z. 113, 17-23 (1970).

- [9] HAUSSMANN, W.: Tensorproduktmethoden bei mehrdimensionaler Interpolation. Math. Z. 124, 191-198 (1972).
- [10] ISAACSON, E., KELLER, H. B.: Analysis of Numerical Methods, New York-London-Sydney: J. Wiley & Sons 1966.
- [11] KNOOP, H.-B.: Zur mehrdimensionalen Hermite-Interpolation. Dissertation. Bochum 1972.
- [12] MAIRHUBER, J. C.: On Haar's theorem concerning Chebychev approximation problems having unique solutions. Proc. Amer. Math. Soc. 7, 609-615 (1956).
- [13] MEINARDUS, G.: Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung. Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1964.
- [14] MILNE, W. E., ARNTZEN, W., REYNOLDS, N., WHEELOCK, J.: Mathematics for Digital Computers, Vol. I: Multivariate Interpolation. Wright Air Development Center, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio (1958).
- [15] MOTZKIN, T. S., WALSH, J. L.: Polynomials of best approximation on a real finite point set. Trans. Amer. Math. Soc. 91, 231-245 (1959).

- [16] SALZER, H. E.: Note on interpolation for a function of several variables. Bull. Amer. Math. Soc. 51, 279-280 (1945).
- [17] SALZER, H. E.: Tables of coefficients for interpolating in functions of two variables. Journ. Math. Phys. 26, 294-305 (1948).
- [18] SALZER, H. E.: Note on multivariate interpolation for unequally spaced arguments, with application to double summation. Journ. SIAM 5, 254-262 (1957).
- [19] SALZER, H. E.: Some new divided difference algorithms for two variables. Ersch. in: On Numerical Approximation. Proc. Sympos. Wisconsin, Madison, 61-98 (1959).
- [20] SCHÖNHAGE, A.: Approximationstheorie. Berlin-New York: de Gruyter 1971
- [21] SINGER, I.: Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1970.
- [22] SOMMER, M.: Gleichmäßige Approximation mit zweidimensionalen Splinefunktionen. Dissertation. Erlangen-Nürnberg 1975.

- [23] THACHER, H. C., Jr.: Generalizations of concepts related to linear dependence. Journ. SIAM 6, 288-299 (1958).
- [24] THACHER, H. C., Jr.: Derivations of interpolation formulas in several independent variables. Annals of the New York Acad. of Sciences 86, 758-775 (1960).
- [25] THACHER, H. C., Jr., MILNE, W. E.: Interpolation in several variables. Journ. Siam 8, 33-42 (1960).
- [26] VEIDINGER, L.: On the numerical determination of the best approximation in the Chebyshev sense. Numer. Math. 2, 99-105 (1960).
- [27] WERNER, H.: Vorlesung über Approximationstheorie. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1966.
- [28] WERNER, H., SCHABACK, R.: Praktische Mathematik II. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1972.
- [29] WHAPLES, G. W.: A note on degree-n independence. Journ. SIAM 6, 300-301 (1958).

L e b e n s l a u f

Am 13. Oktober 1948 wurde ich, Kunibert Martin, als Sohn des Bundesbahnbeamten Bruno Martin und seiner Ehefrau Johanna, geb. Dillmann, in Duisburg-Buchholz geboren.

Nach dem Besuch der Katholischen Volksschule in Duisburg-Buchholz von 1955 bis 1959 wechselte ich auf das Staatliche Landfermann-Gymnasium in Duisburg, an dem ich am 5. Juli 1967 das Zeugnis der Reife des altsprachlichen Gymnasiums erwarb.

Vom Wintersemester 1967/68 an studierte ich an der Ruhr-Universität Bochum Mathematik und Wirtschaftswissenschaft. Dort legte ich am 12. September 1973 die Diplomprüfung in Mathematik ab.

Seit September 1973 arbeite ich als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Mathematik der Ruhr-Universität Bochum. Während dieser Zeit entstand unter Anleitung von Herrn Prof. Dr. H. Ehlich die vorliegende Arbeit "Zur (Polynom-) Interpolation und diskreten Čebyšev-Approximation".

Meine wissenschaftliche Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren H. Ehlich, W. Haußmann, H. Kellerer, N. Kuhlmann, W. Niethammer, H. Reichardt, W. Schempp, R. Schilcher, B. Schips und F. Sommer.

difo-druck · 8600 bamberg
untere königstraße 30